ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ СЕМЕЙСТВ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ СТЕПЕНИ 4

А.А. Незнанов,
кандидат технических наук, доцент кафедры анализа данных и искусственного интеллекта Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Ю.В. Старичкова,
ассистент кафедры прикладной математики Московского энергетического института (Технического университета)

Адрес: г. Москва, ул. Кирпичная, д. 33/5
E-mail: aneznanov@hse.ru, starichkovayv@mpei.ru

Описывается оригинальный программный комплекс для генерации бесконечных и конечных семейств связных транзитивных графов степени 4, полностью покрывающих все известные графы до 30 вершин. Отличительной особенностью разработки является многокритериальная каталогизация семейств на основе характеристик симметрии, структурной сложности и визуализации симметричных диаграмм. Комплекс расширяет функциональные возможности АСНИ «Graph Model Workshop» и позволяет решать задачи, требующие синтеза транзитивных топологий.

Ключевые слова: структурный анализ, теория графов, теория групп, транзитивные графы, генерация, симметрия, структурная сложность, алгоритм, программная реализация.

1. Введение

Транзитивные графы (ТГ) – графы, все вершины которых эквивалентны по своим свойствам, то есть принадлежат одной орбите группы автоморфизмов. Такие графы играют особую роль как в теории, так и в многочисленных приложениях. Это связано с тем, что они являются моделями структур гомогенных систем. С теоретической точки зрения актуальны задачи конструктивного перечисления и классификации ТГ, что необходимо для развития смежных разделов дискретной математики. Практически значимы задачи анализа и синтеза ТГ с необходимыми характеристиками, ставящиеся при исследовании систем управления, топологий вычислительных сетей, химических реакций, строения кристаллов, предельной связности, надёжности и инвариантных преобразований гомогенных систем, методов кодирования данных и т.п. Данные задачи удобнее всего решать, выделив бесконечные семейства с требуемыми свойствами. Основой выделения семейств являются характеристики симметрии, структурной сложности и прорисовки диаграмм.

В работе рассматривается подкласс *связных транзитивных графов степени 4* (ТГС4). Он наиболее широко используется на практике, так как, например, предлагает удачный компромисс между уровнями структурной надёжности и структурной сложности (в первую очередь выражаемой числом рёбер). При этом, в отличие от транзитивных графов степени 3, ТГС4 исследованы недостаточно.

Целью классификации является выделение (по набору критериев) из рассматриваемого множества графов семейств подобных графов с растущим числом вершин. Исходными данными является полная база связных ТГС4 до 30 вершин включительно. Работа базируется на проведённой ранее авторами классификации [8], которая, в свою очередь, стала возможной благодаря предыдущей работе Незнанова А.А. и Кохова В.А. по вычислению характеристик и систематизации справочной информации о ТГС4 [3].

Результатом работы является программный комплекс «Полный генератор семейств транзитивных графов степени 4» синтеза семейств ТГС4, который расширяет функциональные возможности АСНИ *«Graph Model Workshop»* (авторы – Кохов В.А., Незнанов А.А., Ткаченко С.В.). Отметим, что АСНИ уже включает в качестве расширений теоретически-ориентированные генераторы различных классов и семейств, включая случайные структуры общего вида, деревья, последовательно-параллельные, планарные графы и т.д., а также практически-ориентированные генераторы молекулярных графов, регулярных топологий и др.

2. Основные определения

Базовые понятия теории графов и теории групп можно найти в [1-3]. Для понимания последующего изложения приведём следующие определения, связанные с исследуемым классом графовых моделей.

Пусть $G = (V, E)$ обозначает обыкновенный граф, где идентификаторами (номерами) вершин и ребер выступают числа натурального ряда:

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \{1, \ldots, p\}$,
$p = |V|$ – число вершин;
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\} = \{1, \ldots, q\}$,
$q = |E|$ – число ребер.

Через *Aut(G) обозначим группу автоморфизмов графа G* (ГАГ), а через $|Aut(G)|$ – порядок группы. *Фиксатор (стабилизатор) вершины* $v \in V$ – подгруппа $Aut(G, v)$, оставляющая неподвижной вершину v, то есть $Aut(G, v)=\{g \in Aut(G) : g(v)=v\}$. *Фиксатор подмножества вершин* $V^0 \subseteq V$ – подгруппа $Aut(G, V^0)$, оставляющая неподвижной каждую вершину множества V^0, то есть

$$Aut(G, V^0)= \bigcap_{v \in V^0} Aut(G, v).$$

Стабилизатор подмножества вершин $V^1 \in V$ – подгруппа $Aut[G, V^1]$, оставляющая множество V^1 неподвижным, то есть

$$Aut[G, V^1] = \{g \in Aut(G) : \forall v \in V^1 [g(v) \in V^1]\}.$$

Орбита вершины $v \in V$ – подмножество $\Theta(Aut(G), v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v:

$$\Theta(Aut(G), v)=\{v' : [\exists g \in Aut(G) : g(v')=v]\}.$$

Граф называется *транзитивным*, если все его вершины принадлежат одной орбите.

Орбита вершины $v \in V$ *относительно фиксатора* $Aut(G, V^0)$ – подмножество $\Theta(Aut(G, V^0), v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v при условии фиксации подмножества $V^0 \subset V$:

$$\Theta(Aut(G, V^0), v)=\{v' : [\exists g \in Aut(G, V^0) : g(v')=v]\}.$$

Орбита вершины $v \in V$ *относительно стабилизатора* $Aut(G, V^1)$ – подмножество $\Theta(Aut(G, V^1), v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v при условии стабилизации подмножества $V^1 \subset V$:

$$\Theta(Aut(G, V^1), v)=\{v' : [\exists g \in Aut(G, V^1) : g(v')=v]\}.$$

Определим также следующие интегральные характеристики симметрии. Подмножество вершин $V^- \subset V$ называется *экстремальным подмножеством нетождественной стабильности* графа, если справедливо

$$(Aut(G,V^-) \neq E_p) \,\&\, (\forall v \in V \setminus V^- : Aut(G, V^- \cup \{v\}) \approx E_p).$$

Подмножество вершин $V^+ \subset V$ называется *экстремальным подмножеством тождественной стабильности* графа, если справедливо

$$(Aut(G,V^+) \approx E_p)\,\&\,(\forall v \in V^+ : Aut(G,V^+ \setminus \{v\}) \not\approx E_p).$$

Пусть Π^- и Π^+ обозначают соответственно множество всех подмножеств V^- и V^+ вершин графа G.

Тогда *число тождественной стабильности* (Ψ) и *число нетождественной стабильности* ($\Chi$) графа равны, соответственно:

$$\psi = \min_{V^+\in \Pi^+} \left|V^+\right|$$

$$\chi = \max_{V^-\in \Pi^-} \left|V^-\right| \quad .$$

Числом тождественности $t(G)$ графа G называется минимальное число новых вершин, необходимых для построения тождественного надграфа OG графа G, то есть

$$t(G) = \min_{Aut(OG)\approx E_p} (\left|V_{OG}\right| - \left|V_G\right|).$$

Прорисовка диаграммы графа — получение одного из визуальных образов графа на плоскости. Мы будем рассматривать симметричные диаграммы ТГС4, то есть диаграммы, хотя бы частично отражающие симметрию вершин графа. *Вариантами прорисовки* ТГС4 назовём получение диаграмм, существенно отличающихся по расположению вершин и рёбер графа относительно осей симметрии. Наиболее популярными вариантами прорисовок транзитивных графов являются прорисовки с расположением вершин по нескольким окружностям с центром в одной и той же точке.

Семейство — последовательность (конечная или бесконечная) подобных по некоторым характеристикам графов с возрастающим числом вершин, для которых определена процедура построения следующего представителя последовательности по предыдущему.

3. История разработки и основные особенности комплекса

Основной задачей синтеза топологий ТГС4 является не только конструктивное перечисление всех структур на заданном числе вершин, но и получение ТГС4 с большим числом вершин и заданными характеристиками симметрии. Одним из подходов к синтезу ТСГ4 с большим числом вершин и заданными характеристиками симметрии является классификация и генерация семейств с заданными характеристиками на основе уже перечисленных ТГС4.

Хотя серьёзное исследование класса транзитивных графов началось ещё в середине 20 века, полноценные результаты по конструктивному перечислению ТГ были получены уже в 1990-х годах и отражены в работах *H.P.Yap, B.D.McKay, G.F.Praeger* и *C.E.Royle* [4-6]. На данный момент в каталоге ТГС4 перечислены все структуры с числом вершин до 31 (297 графов).

В 1988 г. Коховым В.А. были представлены результаты оригинального исследования интегральных характеристик симметрии класса ТГС4 [7]. В дальнейшем, опираясь на ранее полученные Незнановым А.А. (2001-2004 гг.) и Киричек О.В. (2003-2004 гг.) результаты, начата разработка программного комплекса для синтеза данного класса графов. Следует отметить, что в работе, выполненной ранее Киричек О.В., присутствовал ряд проблем, не позволяющих говорить о полной завершённости созданного программного комплекса, в частности:

✧ неполнота классификации (не все графы, содержащиеся в базе, могли быть классифицированы, как представители одного из семейств, предложенных в работе);

✧ избыточная сложность классификации (подклассы, которые целесообразно объединять в один класс, были выведены в роли отдельных классов);

✧ некоторые изоморфные графы были отнесены в различные семейства, таким образом, формально отличаясь друг от друга.

Работа по улучшению классификации ТГ была начата в 2005 году. В ходе работы постоянно уточнялась классификация ТГ по критериям: порядок группы автоморфизмов; число тождественной стабильности; число нетождественной стабильности; структура орбит фиксатора вершины; внешний вид диаграммы графа (основной эстетический критерий выделения семейства). В 2008 году была опробована первая версия программного комплекса (ПК) «Полный генератор семейств транзитивных графов степени 4» *(TransGen)* и были приведены первые результаты полной классификации ТГС4 до 30 вершин включительно [8]. Однако было ясно, что результаты можно улучшить. В 2010 году была готова новая версия комплекса синтеза ТСГ4, которая позволяет генерировать семейства:

✦ как конечные, так и бесконечные;

✦ графы которых либо имеют идентичные значения характеристик $|Aut(G)|$, ψ, χ, $t(G)$, либо изменение этих значений при переходе к следующему графу семейства описывается одной и той же формулой;

✦ начиная как с первого графа семейства (выбранного так, чтобы обеспечить безизбыточность генерации), так и с первого *уникального представителя* семейства, для которого стабилизируются все характеристики семейства;

✦ задавая характеристики $|Aut(G)|$, ψ и χ, интересующие пользователя (с возможностью поиска в базе характеристик);

✦ выбирая одну из симметричных прорисовок диаграмм для семейства.

4. Функциональность программного комплекса

4.1. Основные возможности и объёмные характеристики

Основными возможностями программного комплекса *TransGen* является генерация выбранного пользователем подмножества 59 бесконечных и 73 конечных семейств ТГС4 с симметричной прорисовкой диаграмм синтезируемых графов.

Программный продукт *TransGen* является расширением АСНИ «*Graph Model Workshop*» (*GMW*), разработанной в научной группе Кохова В.А. *TransGen* создавался в среде *CodeGear RAD Studio 2007 (Delphi Personality)* в виде динамически компонуемой библиотеки, которая экспортирует функции, вызываемые АСНИ. В *табл. 1* содержится информация об общем объёме программных разработок.

Таблица 1.

Некоторые параметры разработанного программного комплекса

№	Параметр	Значение
1	Число строк авторского исходного кода	6280
2	Объём авторского исходного кода	164 КБ
3	Количество компилируемых строк кода	98742
4	Объём машинного кода	2,1 МБ

4.2. Архитектура комплекса и описание порождаемых семейств

На *рис. 1* представлена архитектура ПК *TransGen*. При реализации программного комплекса для построения семейств ТСГ4 используются шаблоны расстановки вершин по окружности и шаблоны генерации рёбер. Шаблоны расстановки вершин по окружности определяются классификацией семейств, указание шаблона генерации ребер позволяет получить подклассы семейств. В *табл. 2* приведены основные шаблоны расстановки вершин по окружности и количество семейств, для построения которых они использованы (идентификаторы семейств имеют вполне определённый смысл, который, однако не важен прикладному пользователю).

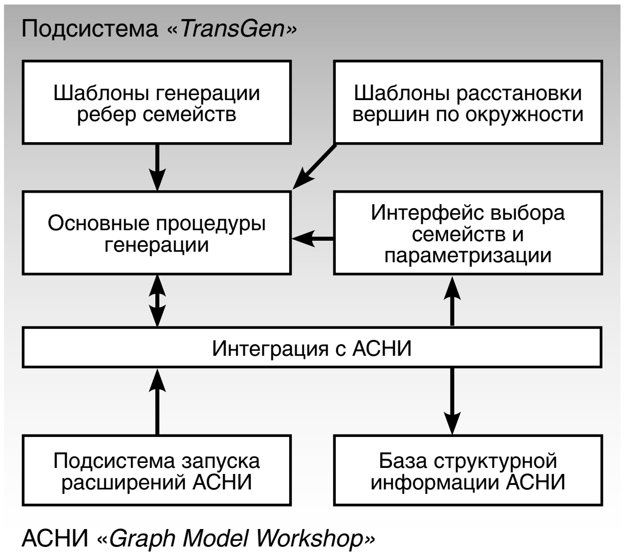


Рис. 1. Архитектура ПК *TransGen*.

Таблица 2.

Классы шаблонов расстановки вершин по окружности

№	Шаблоны расстановки вершин по окружности	Количество семейств
1	Вершины расположены на одной окружности, соседние вершины смежны. Подклассы определяются расположением остальных рёбер.	**51** семейство. G_1, G_2, G_5, G_6, G_7, G_102, G_107, G_108, G_119, G_209, G_230, G_11, G_12, G_13, G_14, G_15, G_16, G_17, G_18, G_20, G_103, G_210, G_211, G_231, G_239, G_21, G_22, G_25, G_68, G_78, G_214, G_215, G_33, G_219, G_237, G_238, G_26, G_27, G_28, G_35, G_29, G_30, G_36, G_37, G_38, G_74, G_117, G_217, G_220, G_233, G_203
2	Вершины расположены на одной окружности и соседние несмежны.	**4** семейства. G_42,G_125, G_221, G_222
3	Вершины расположены по нескольким окружностям.	**1** семейство. G_56
4	Графы, имеющие прорисовку другого вида (тор).	**3** семейства. G_10001 – 10004
5	Конечные семейства с уникальными шаблонами.	**73** семейства. G_1001 – G_1004, G_1006 – G_1074
Итого: **59** бесконечных и **73** конечных семейства		

Для дальнейшего построения представителей семейства после определения шаблона расстановки вершин по окружности применяется шаблон генерации ребер для расположения остальных ребер в графе. Пример схемы построения ребер для шаблона первого типа приведен на *рис. 2*, где:

✦ p – число вершин в графе;

✦ i – текущая обрабатываемая алгоритмом синтеза вершина (для графов с прорисовкой по одной окружности нумерация ведется последовательно по окружности по часовой стрелке);

✦ ребро, проходящее через центр графа – ребро, соединяющее вершины i и $(p / 2 - i)$;

✦ k – переменная, используемая для указания смежности вершин (задает номер вершины в соответствии с ее расположением на окружности).

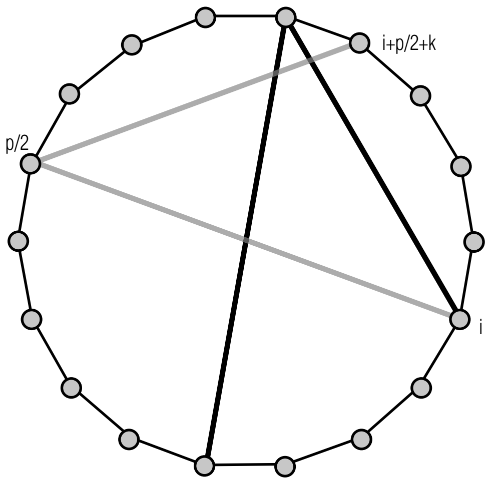


Рис. 2. Иллюстрация понятия шаблона генерации ребер.

Модуль параметризации шаблона хранит базу информации о семействах, в том числе:

✦ шаг SV – разность числа вершин между i и $(i$-1) графами;

✦ первый граф семейства с числом вершин FV;

✦ первый уникальный граф с числом вершин UV – представитель семейства, начиная с которого и для каждого следующего графа характеристики симметрии совпадают;

✦ число вершин FN последнего графа в семействе, если оно конечное;

✦ значения или формулы вычисления *числа симметрии* ($|Aut(G)|$), чисел *тождественной* (ψ) и *нетождественной* (χ) стабильности;

✦ варианты прорисовок диаграмм для семейств, среди которых выделена каноническая.

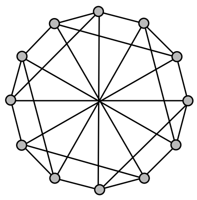
Пример информации о семействе G_68 приведён в *табл. 3*, где n обозначает порядок группы предыдущего представителя семейства, а m – число нетождественной стабильности предыдущего представителя семейства.

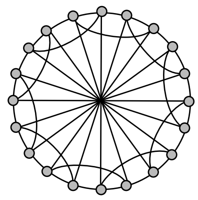
Таблица 3.

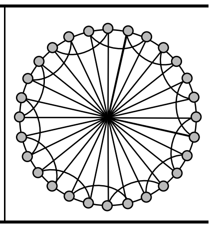
Пример информации о семействе ТГС4

Название: G_68						
FV	UV	SV	Ψ	χ	$\lvert Aut(G_1)\rvert$	$\lvert Aut(G)\rvert$
12	12	8	2	m+4	48	n+32

Ранее конструктивно перечисленные представители (по каталогу [3]): 12-4-1, 20-4-16, 28-4-21
Диаграммы канонической прорисовки:







На синтезированных семействах (в среднем до 150 вершин) проведены объёмные вычислительные эксперименты по уточнению строения групп автоморфизмов, анализу структурной сложности и структурной надёжности ТГС4. Всего потрачено более 30 часов машинного времени на первичные вычисления характеристик графов и более 8 суток на анализ результатов. Вычислительные эксперименты подтвердили *корректность* (принадлежность ТГС4), *безизбыточность* (отсутствие ТГС4, принадлежащих нескольким семействам) и *полноту* (покрытие всех известных ТГС4 до 30 вершин включительно) семейств ТГС4, порождаемых ПК *TransGen*.

4.3. Характеристики используемых алгоритмов

Методы конструктивного перечисления ТГ, предложенные в работах *H.P. Yap, G.F. Praeger, C.E. Royle, B.D. McKay* [4-6] и других исследователей, связаны с вычислением характеристик ГАГ. Возникающие при этом задачи для графов общего вида принадлежат либо к классу NPI, либо NP-полны. Например, задача определения орбит эквивалентна по сложности задаче распознавания изоморфизма графа и в общем виде (для произвольного графа) остаётся NP-сложной. Для графов с ограниченными степенями вершин Лакс Ю.М. ещё в 1985 году доказал возможность построения полиномиального алгоритма, но реализации практически полезного алгоритма с гарантированно полиномиальным временем работы авторам не из-

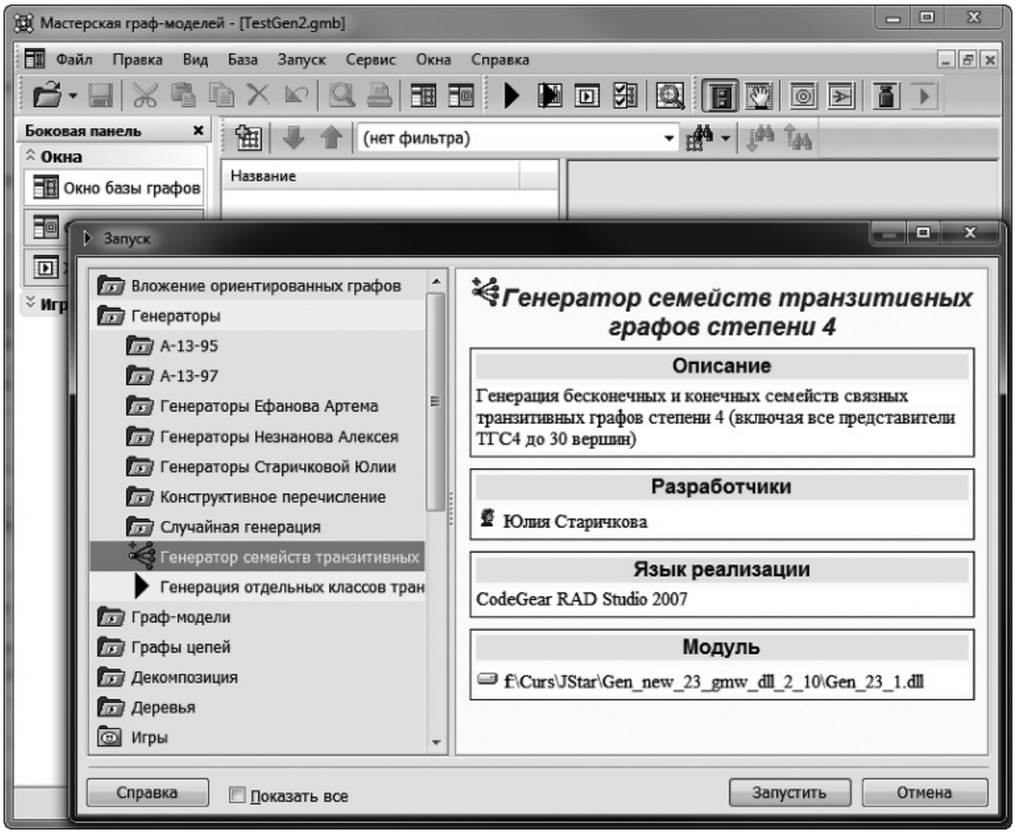


Рис. 3. Запуск TransGen в среде АСНИ Graph Model Workshop.

вестно. Однако для обработки ГАГ относительно небольших графов существуют хотя и переборные, но эффективные с практической точки зрения алгоритмы. Важнейшей задачей является задача построения порождающего множества (ПМ) ГАГ, поскольку, зная некоторое порождающее подмножество группы, можно определять характеристики этой группы, не перечисляя все её элементы. *B.D. McKay* в 1981 году создал алгоритм построения *минимального* ПМ ГАГ, послуживший основой библиотеки *Nauty* [9], в которой реализованы алгоритмы построения ПМ ГАГ, поиска орбит, канонизации графа и решения смежных проблем. *Nauty* стала первым в целой серии реализаций, либо более специализированных, либо использующих дополнительные изощрённые техники для обработки «худших случаев».

На этапе уточнения классификации и верификации семейств, а также исследования дополнительных свойств семейств, использовались авторские алгоритмы анализа свойств ГАГ, в основу которых положен вариант построения ПМ ГАГ, предложенный в проекте *Bliss* [10], который, в свою очередь, основан на *Nauty*.

Однако, при синтезе используются специальные шаблоны генерации рёбер (вариантов топологий) и координат вершин (вариантов прорисовок), которые образуют каталог, обращение к которому с передачей параметров генерации приводит к построению ТГС4 с заданным числом вершин за время, *прямо пропорциональное числу генерируемых рёбер*. А поскольку число рёбер в регулярном графе степени 4 равно 2p, где p – число вершин, то алгоритм синтеза представителя семейства имеет линейную асимптотическую оценку временной вычислительной сложности относительно его числа вершин.

Таким образом, почти *два года* машинного времени, затраченного при разработке ПК на проведение вычислительных экспериментов, привели к тому, что в результате *TransGen* работает настолько быстро, что любые дополнительные оптимизации процесса генерации бессмысленны.

4.4. Интерфейс с пользователем и проведение вычислительных экспериментов

Возможно несколько вариантов сценария использования ПК *TransGen*. Основной сценарий – генерация заданного числа ТГС4 выбранных семейств, начиная с первого или первого уникального представителя. Выбор семейств производится как прямой пометкой семейств, так и применением фильтров по заданным характеристикам $|Aut(G)|$, ψ и χ (см. далее). Однако существуют и дополнительные сценарии использования: 1) конструктивное перечисление всех ТГС4 до 30 вершин включительно, что очень полезно при решении теоретических задач; 2) генерация графов в заданном диапазоне числа вершин, что обычно требуется на практике при синтезе топологий реальных систем.

При любом сценарии возможно задание дополнительных параметров.

1. Указание количества графов.

2. Пропуск представителей. Например, можно генерировать каждый 4 граф в семействе.

3. Выбор либо канонической, либо одной из других полностью симметричных прорисовок диаграмм для данного семейства (семейство может предлагать десятки вариантов прорисовки).

Запуск расширения осуществляется через меню «Запуск» АСНИ *GMW* или в диалоге интерактивного запуска расширений *(рис. 3)*. Отметим, что генератор бессмысленно запускать в пакетном режиме, зато можно запускать, не открыв предварительно базу графов, так как генератор умеет создавать новые базы графов с выбранным стилем и параметрами.

Расширение обладает развитым интерфейсом с пользователем, который строится вокруг списка семейств. Главное окно генератора показано на *рис. 4.* Непосредственно в списке отображаются три первых представителя с выбранным вариантом прорисовки (по умолчанию используется каноническая прорисовка по каталогу [3]) и комментарии, которые можно изменять. Через контекстное меню можно получить информацию о характеристиках семейств. Особый интерес представляет возможность фильтрации семейств. В текущей версии возможна фильтрация по характеристикам симметрии. Поиск семейств по характеристикам и применение фильтров производится в отдельном окне, которое показано на *рис. 5.* После применения фильтра изменяется состав помеченных семейств в списке.

Приведем сценарий использования ПК (как расширения в составе АСНИ *GMW*) для синтеза высоко-симметричных топологий. Допустим, мы хотим синтезировать топологию со сложным строением группы автоморфизмов максимального порядка. Задав фильтр на порядок группы, обнаруживаем, что искомым семейством будет семейство G_25. Применив фильтр, зададим необходимые параметры генерации представителей семейства: 50 графов для генерации, начиная с первого представителя, с канонической прорисовкой и созданием новой базы со стилем визуализации, диктуемым предметной областью. Результатом работы ПК *TransGen* будет база структур с соответствующими параметрами *(рис. 6).*

5. Исследование характеристик семейств ТГС4

Приведём примеры применения разработанной системы. Первая из трудоемких задач – построение индексов структурной сложности для семейств ТГС4 и установление связи между характеристиками симметрии и сложности. Суть вычислительного эксперимента заключалась в определении корреляций значений индексов структурной спектральной сложности [11]в различных базисах для сгенерированных представителей семейств ТГС4 с числом вершин до 120. В качестве базисов структурных

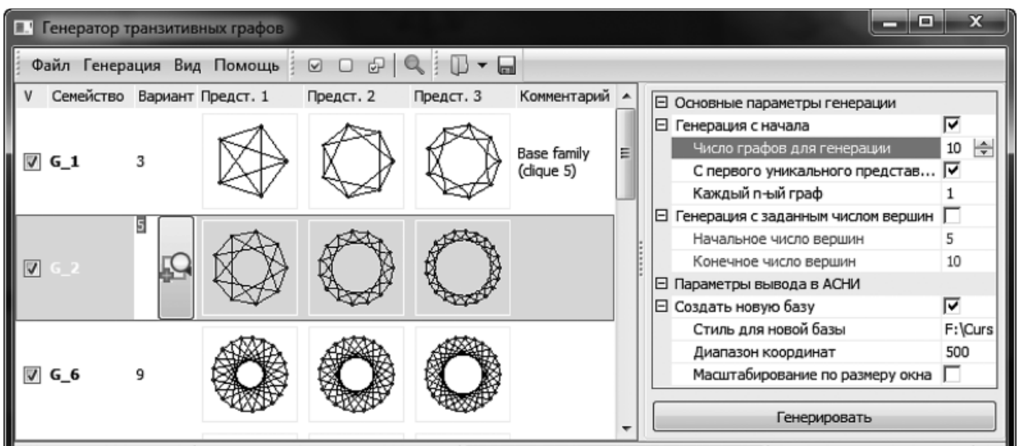


Рис. 4. Интерфейс подсистемы *TransGen*.

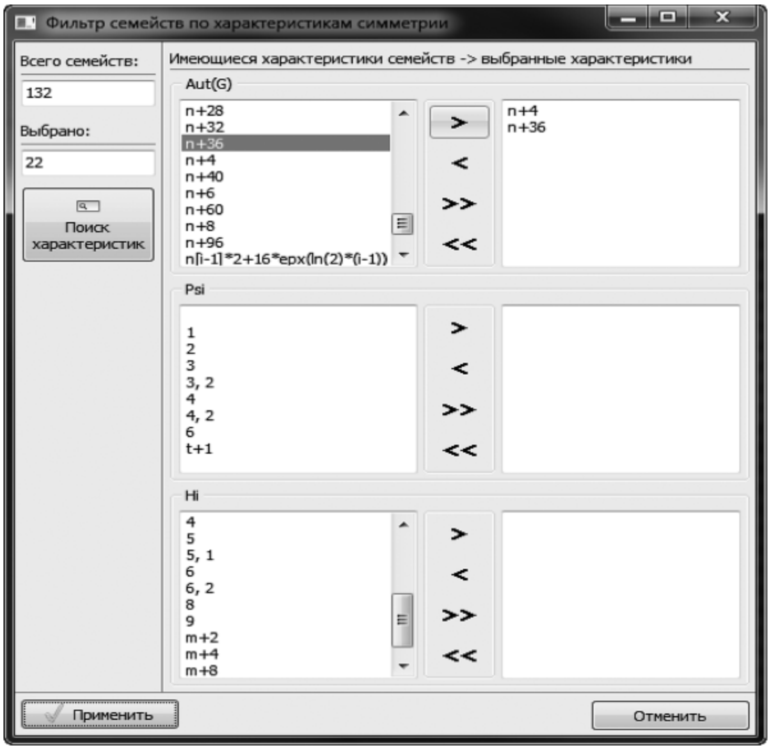


Рис. 5.
Диалог выбора семейств по базовым характеристикам симметрии.

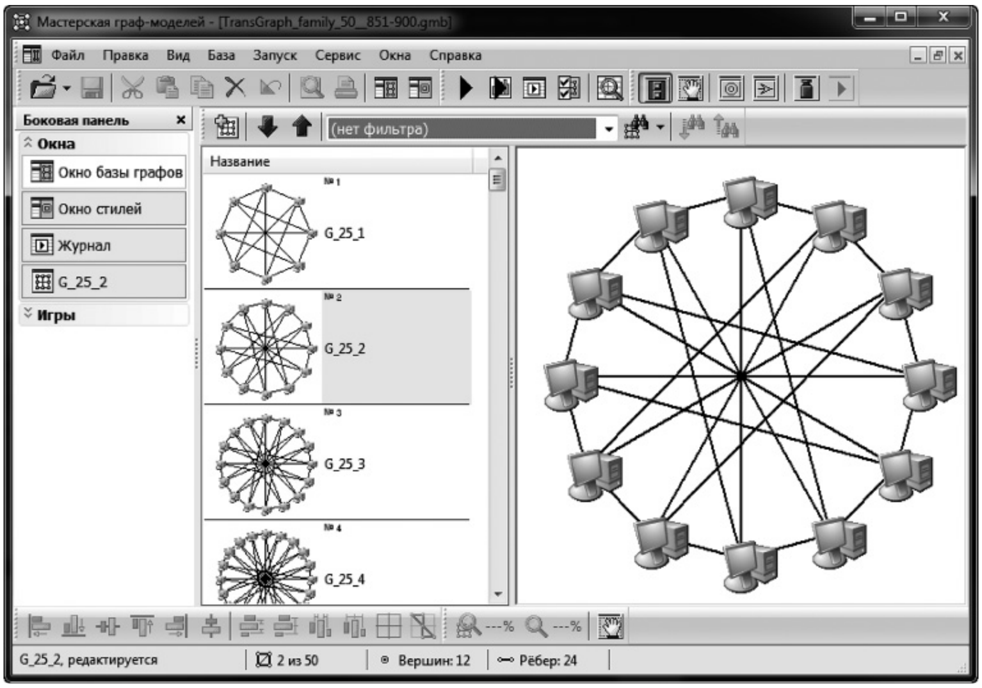


Рис. 6.
Пример результата работы подсистемы *TransGen* (50 первых представителей семейства G_25).

дескрипторов использовались базисы цепей, циклов и деревьев с ограничением на размер (число вершин). Таким образом, проведено по 20 вычислительных экспериментов для 59 бесконечных семейств ТСГ4, всего обработано 2950 графов. В результате построены графики зависимости индексов сложности в различных базисах от числа вершин представителя семейства ТГС4, выявлены семейства граничные по значению индексов сложности. Пример сравнения индексов сложности в базисе деревьев приведен на *рис. 7*. Проведено сравнение характеристик симметрии и значений индексов сложности для семейств ТГС4. Оказалось, что спектральная сложность семейств в разных базисах совершенно по-разному коррелирует с интегральными характеристиками симметрии, что очень важно

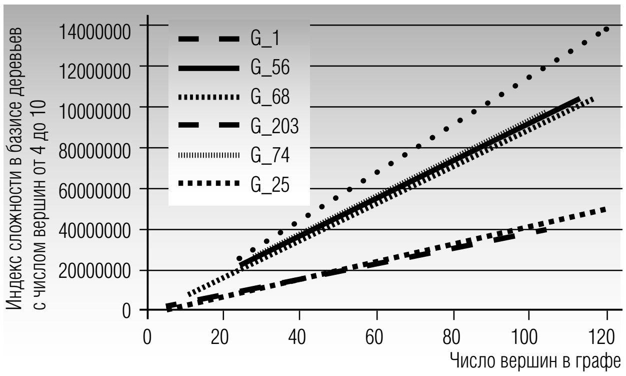


Рис. 7. Графики значений индекса спектральной сложности в базисе всех деревьев с числом вершин от 4 до 10 для нескольких показательных семейств.

при выборе топологий реальных систем с заданным уровнем надёжности и минимизацией сложности.

Второй из задач, для которой использовались порождаемые семейства, являлась задача повышения эффективности базовых алгоритмов структурного анализа на высоко-симметричных графах [12].

6. Заключение

Описана цель создания, история развития и функциональность программного комплекса «Полный генератор семейств транзитивных графов степени 4». Он расширяет функциональность АСНИ *«Graph Model Workshop»* и активно используется при проведении теоретических исследований в области теории графов и теории групп, а также при решении прикладных задач, связанных с синтезом топологий высокопроизводительных вычислительных систем и систем связи. Так, были синтезированы логические топологии для эффективной реализации параллельных алгоритмов на системах с различным числом узлов, причём топологии содержали заданные типы циклических фрагментов. Различные варианты симметричных топологий были применены при решении задач оптимизации системы управления и документооборота в комитете финансов Новгородской области и филиалах. Однако структуры степени 4 оказались избыточны и в итоге были внедрены системы с кубической топологией, показавшие лучшее соотношение стоимость/надёжность.

Уже начата работа по созданию подсистемы синтеза транзитивных топологий степени 5. Для ТГС4 по просьбам пользователей будет добавлена база характеристик структурной надёжности. Также планируется включение в генератор фильтрации по базовым моделям структурной сложности (как минимум – в базисах цепей и циклов), поскольку оказалось, что число небольших фрагментов заданных типов (а особенно – их отсутствие) является практически значимой характеристикой семейства. ■

Литература

1. Берж К. Теория графов и ее применение. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 320 с.
2. Харари Ф. Теория графов. – М. : Мир, 1973. – 303 с.
3. Незнанов А.А., Кохов В.А. Справочник по теории графов. Характеристики симметрии и сложности связных транзитивных графов степени 4 с числом вершин до 30 включительно. — М. Деп. в ВИНИТИ, №1094-В2004, 2004. – 418 с.
4. Yap H.P. Point symmetric graphs with p<13 points, Nanta Math. 6 (1973), PP. 8-20.
5. Royle G.F., Praeger C.E. Constructing the vertex-transitive graphs of order 24, Journal of Symbolic Computation, Volume 8, Issue 4, 1989, PP. 309-326.
6. McKay B.D., Royle G.F. The transitive graphs with at most 26 vertices, ArsCombinatoria, 30 (1990), PP. 161-176.
7. Кохов В.А. Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд.,1986. – С. 97-125.
8. Старичкова Ю.В., Незнанов А.А. Улучшенная классификация и генерация транзитивных графов степени 4. // Доклады международной конференции «Информационные средства и технологии». (МФИ-2008), Т.2, Москва, 2008. – С. 75-79.
9. McKay B.D. The nauty page (http://cs.anu.edu.au/~bdm/)
10. Junttila T., Kaski P., bliss: A Tool for Computing Automorphism Groups and Canonical Labelings of Graphs (http://www.tcs.hut.fi/Software/bliss/)
11. Кохов В.А. Концептуальные и математические модели сложности графов. – М. : Издательство МЭИ, 2002. – 157 с.
12. Незнанов А.А., Кохов В.А. О связи строения стационарных подгрупп группы графа и эффективности учёта симметрии при решении переборных задач структурного анализа // Труды Московского физико-технического института. 2009. Т. 1. № 2. – С. 77-83.