R/S АНАЛИЗ НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

А.В. Зиненко,
кандидат технических наук, доцент кафедры финансов и кредита Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф.Решетнева

E-mail: anna-z@mail.ru
Адрес: г. Красноярск, просп. имени газеты «Красноярский рабочий», д. 31

В работе описывается алгоритм относительно нового статистического метода – R/S анализа, описанного Гарольдом Херстом. Данный метод анализа временных рядов позволяет определить, является ли временной ряд случайным или персистентным, то есть обладающим долговременной памятью. К временным рядам биржевых котировок применяется алгоритм R/S анализа и делается вывод об их персистентном характере.

Ключевые слова: показатель Херста, самоподобие, степенные законы.

1. Введение

Исследование динамики финансовых рынков является важной частью теории финансовых инвестиций. Сложившиеся в шестидесятых и семидесятых годах прошлого века методы анализа финансовых рынков до сих пор преподаются в экономических вузах, хотя еще с начала 90-х годов прошлого века показано, что они действуют только в периоды стабильного состояния рынка. Речь идет о таких методах анализа, как модель оптимального инвестиционного портфеля Гарри Марковитца, модель CAPM Вильяма Шарпа и модель ценообразования опционов Блека – Шоулза. Эти модели являются базой современной инвестиционной теории. Они основаны на предположении Луи Башелье, сделанном в еще в 1900-м году, о том, что динамика финансовых рынков подчиняется закону нормального или гауссовского распределения.

Вероятностные модели рынка успешно работали вплоть до обвала американского рынка в 1987 году (индекс Доу-Джонса за один день упал на 29,2%). Аналитики уверяли, что это редчайшее событие, согласно кривой Гаусса, в следующий раз нечто подобное может наступить через несколько миллионов лет. Но затем последовали кризисы 1992, 1995, 1998, 2008 года. Это противоречило всем теоретическим постулатам вероятностного подхода. Стало ясно – нужен совершенно другой взгляд на сущность финансового рынка. Ответ дал американский математик, основоположник теории фракталов Бенуа Мандельброт. Он обнаружил явление, которое назвал «толстые хвосты». Его суть заключается в том, что кривая распределения вероятностей изменения рыночных котировок выглядит не так, как гауссовская колоколообразная кривая. А именно, по обеим сторонам «колокола», вероятности гораздо выше, чем при нормальном распределении. Эти результаты Мандельброт и его соратники получили, исследуя динамику цен на хлопок, котировки акций крупных американских компаний и фондовых индексов[1]. Они анализировали статистические данные по биржевым котировкам более чем за сто лет, рассматривая различные таймфрэймы. К середине шестидесятых не было таких резких коллапсов, как начиная с конца 80-х, но, тем не менее, соответствие гауссовскому распределению не было обнаружено. Например, согласно анализу Фама промышленного индекса Доу-Джонса, колебания, превышающие пять стандартных отклонений, случались в пять тысяч раз чаще, чем предсказывала нормальная кривая. Кроме того, полученные Мандельбротом кривые распределения вероятностей имели более высокие пики. Мандельброт предположил, что динамика фондовых рынков не является случайной, а подчиняется некому степенному закону.

2. Степенной подход к анализу временных рядов

Степенные законы активно применяются в исследованиях природных социальных процессов. Одним из пионеров исследования степенных законов стал британский гидролог Гарольд Эдвин Херст. Начиная с 1906 года, он работал над новым статистическим методом анализа временных рядов.

Перед Херстом стояла задача изучения разливов Нила с целью строительства водохранилища такого объема, чтобы в засушливые годы население не нуждалась в воде. Для этого ему следовало изучить динамику приливов и отливов Нила за долгие годы и обнаружить в ней какую-либо периодичность. Расход воды Нила изменялся в очень широких пределах, при этом могло быть несколько засушливых и несколько дождливых периодов подряд. Существующие на тот момент методы статистического анализа основывались на том, что временной ряд с большим количеством периодом является случайным и подчиняется гауссовскому закону нормального распределения. Исследуемые события должны быть независимыми друг от друга и иметь одинаковую вероятность. Если временной ряд не подчиняется нормальному закону, то существуют различные методы внесения в него корректировок, чтобы с некоторыми оговорками назвать его случайным и идентично распределенным.

Проблема, которую рассматривал Херст, не допускала такой возможности. С целью выявления какой-либо закономерности он исследовал данные о разливах Нила за 847 лет (древние египтяне вели такие записи).

Следует отметить, что проблемой периодичности разливов Нила озадачивался еще Геродот в 450 году до н.э. Согласно Геродоту, ни жрецы, ни ученые не могли объяснить эту периодичность.

Херстом были обнаружены следующие циклы: за разливами выше среднего в следующем периоде следовали еще большие разливы. Когда направление менялось и наступал засушливый период, за ним следовали еще более засушливые. Мандельброт назвал подобное явление «эффект Иосифа», вспомнив библейскую притчу о семи благодатных и о семи засушливых годах. Согласно Мандельброту, данный эффект имеет место на финансовых рынках.

Помимо статистики разливов Нила Херст изучил еще 51 природное явление. Например, илистые отложения на дне озера, годовые кольца на деревьях. И во всех этих явлениях он исследовал размах, то есть разницу между максимальным и минимальным значением.

Херст вспомнил формулу Эйнштейна, широко используемую при анализе последовательности случайных событий: размах вариации при большом количестве испытаний равен корню из количества испытаний [2].

$$R = n^{0,5}. \qquad (1)$$

Практические исследования Херста природных явлений показали, что размах расширяется несколько быстрее, чем это следует из формулы, приведенной выше. Согласно Херсту показатель степени составил примерно 0,75.

Гидрологи активно использовали формулу Херста. Мандельброт, создатель фрактальной геометрии, обнаружил в формуле Херста законы, которые связаны с фрактальностью временных рядов. Он назвал их «долговременная память»[1].

Применение R/S анализа к фондовым рынкам также является инициативой Бенуа Мандельброта. Согласно его исследованиям ставки по дневным банковским кредитам имеют показатель Херста 0,7, тогда как цены на пшеницу и котировки облигаций являются случайными, то есть имеют H=0,5. Одновременно с Мандельбротом подобные исследования проводил Эдгар Петерс. Им обнаружены высокие значения показателя Херста для голубых фишек (IBM, Apple, Xerox) и близкие к 0,5 значения для второго эшелона. В своей работе «Фрактальный анализ финансовых рынков» Петерс проводил R/S анализ динамики валютных пар и обнаруживал высокое значение показателя H [2].

Мандельбротом также были исследованы макроэкономические показатели США за несколько сотен лет. Он обнаружил интересный факт: сильная зависимость между предыдущими и последующими значениями со временем уменьшается, но весьма медленно. Аналогичным образом уменьшается зависимость между последовательными природными явлениями. Именно это Мандельброт назвал «долговременной памятью».

Для явлений, изучаемых Херстом, показатель Херста H (изначально он обозначался k, но Мандельброт назвал его в честь автора) не превышал единицы, но был не меньше 0,5. При $H = 0,5$ выборка является случайной (таков H например для Броуновского движения). Если показатель Херста колеблется от 0,5 до 1, то процесс характеризуется долговременной памятью. Это означает, что последующие показатели сильно зависят от прошедших. К этому близка характерная для хаоса чувствительность к начальным условиям. Показатель Херста, колеблющийся от 0 до 0,5, означает антиперсистентный процесс. То есть система меняется быстрее, чем случайная. Это означает частые, но небольшие изменения. Можно сказать, что чем выше показатель Херста, тем меньше на временном ряду «зазубрин». Можно предположить, что при показателе Херста равном единице мы будем иметь гладкую прямую (восходящий или нисходящий тренд).

В природе встречаются системы первого типа, с показателем Херста от 0,5 до 1, которые называются персистентными [3] (согласно Мандельброту – инерционными). Персистентные процессы характеризуются независимостью от временного масштаба. Дневные изменения зависят от прошедших дневных изменений в той же степени, что и, например, недельные изменения зависят от прошедших недельных изменений. Очевидно, что это свойство персистентных процессов является фрактальным.

Показатель Херста рассчитывается с помощью R/S анализа, где R – нормированный размах вариации, а S – стандартное отклонение. Формула для расчета выглядит следующим образом:

$$R/S = c \cdot n^H, \tag{2}$$

где c – константа, n – количество элементов выборки.

Эмпирически Херст рассчитал, что константа c равна приблизительно 0,5. Но это не более чем допущение. Ученые, использующие R/S анализ, берут разные значения c. Вообще, как это будет показано ниже, константу можно вывести как свободный член уравнения регрессии.

Отметим важную особенность: – размах вариации изменяет свой масштаб в зависимости от числа наблюдений по степенному закону. Изменение масштаба по степенному закону – это признак самоподобия и, как следствие, фрактальности временного ряда. Бенуа Мандельброт занялся исследованием степенных законов задолго до открытия и описания фракталов. Он связал одно с другим и по нашему мнению степенные законы стали для Мандельброта одной из ступеней, которая подвела его к фрактальной геометрии. К сожалению, фрактальные модели финансовых рынков не были завершены им при жизни (Мандельброт скончался в 2010 году).

3. Алгоритм R/S анализа

Алгоритм осуществления R/S анализа следующий. Пусть мы имеем выборку из n+1 элементов (n : 2). Данная выборка представляет собой временной ряд, желательно, чтобы количество значений было достаточно высоко (например, Эдгар Петерс при исследовании фондового рынка брал около 5 000 значений) [1]. Преобразуем выборку со помощью логарифмических соотношений, и получим временной ряд со значениями уровней длиной n :

$$log \frac{U_i}{U_{i-1}} \tag{3}$$

Следующий шаг – это найти наименьший собственный делитель n, не меньший 10. Обозначим его m. Разделим n на $k=n/m$ групп. Элементы в каждой группе обозначим t_i. Очевидно, что количество элементов в каждой группе составляет m. Найдем средние значения в каждой группе

$$\overline{t_k} = \frac{1}{m}\sum\nolimits_{i=1}^{m} t_i,\ \frac{1}{m}\sum\nolimits_{i=m+1}^{2m} t_i \ldots \frac{1}{m}\sum\nolimits_{i=(k-1)m+1}^{n} t_i \tag{4}$$

и накопленные отклонения от среднего X_i:

$$X_1 = t_1 - \frac{1}{m}\sum\nolimits_{i=1}^{m} t_i,\ X_2 = (t_2 - \frac{1}{m}\sum\nolimits_{i=1}^{m} t_i) + X_1 \ldots X_m = = (t_m - \frac{1}{m}\sum\nolimits_{i=1}^{m} t_i) + X_{m-1} \tag{5}$$

Нормированный размах по каждой группе составит

$$R_k - max(X_i) - min(X_i).$$

Также по каждой группе рассчитываем стандартное отклонение S_k по стандартной формуле

$$S_k=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(t_i-\overline{t}_k)^2}. \qquad (6)$$

Показатель *R/S* по каждой группе рассчитываем как R_k/S_k. Затем находим средний размах вариации

$$\overline{R/S_j}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}R/S_i \qquad (7)$$

Индекс *j* в данном случае означает, что мы получили средний размах вариации на *j*-м шаге, который соответствует *j*-му собственному делителю. Мы повторяем описанную выше процедуру, используя в качестве *m* все возможные собственные делители. На последнем шаге *m* будет равно $n/2$.

Таким образом, мы получаем выборку

$$\overline{R/S_j},\ j=1,\frac{n}{2},$$

количество элементов в выборке соответствует количеству собственных делителей *n*. Теперь можно построить уравнение линейной регрессии, в котором зависимой переменной выступает логарифм показателя *R/S*, а факторным признаком – логарифм количества элементов в *j*-й группе *k*:

$$log\,R/S - log\,c + H\cdot log\,k \qquad (8)$$

Параметры этого уравнения линейной регрессии легко находятся методом наименьших квадратов. Можно использовать соответствующую надстройку Microsoft Excel.

Для проверки значимости уравнения регрессии можно использовать статистику Фишера (в Excel рассчитывается с помощью надстройки), которая сравнивается с табличным значением для соответствующего уровня значимости, количества факторов (в нашем случае – один) и количества элементов в выборке. Также следует проверить значимость параметра *H* с помощью статистики Стьюдента, которая также сравнивается с табличным значением.

В работе «Хаос и порядок на рынках капитала»[3] Петерс предлагает еще один вариант проверки состоятельности расчета показателя Херста. Если мы получили высокое значение данного показателя, то проверить, существует ли долговременная память на самом деле можно, перемешав исходные данные. Действительно, если имеет место эффект долговременной памяти, то порядок данных важен и при перемешивании показатель Херста значительно уменьшится. Если показатель останется неизменным можно говорить о несостоятельности выборки.

4. Реализация алгоритма R/S анализа на примере российских и зарубежных фондовых индексов

Программная реализация алгоритма нахождения показателя Херста предложена Эдгаром Петерсом [3]. В книге «Фрактальный анализ финансовых рынков» им предложен текст программы на языке Gauss. Следует отметить, что сложность в программной реализации вызывает только нахождение нормированного размаха. При найденном нормированном размахе не составит труда воспользоваться надстройкой Excel «Линейная регрессия». В данной надстройке также осуществляется проверка значимости уравнения и параметров. При нахождении показателя *R/S* сложность вызывает нахождение статистических показателей по *k* группам. В рамках возможностей Excel реализация описанного алгоритма будет очень трудоемкой. При значительных объемах выборки применять стандартные методы Excel не представляется целесообразным. Но нами для каждого шага алгоритма были написаны макросы на языке VBA, что значительно облегчило задачу и позволило произвести эксперимент по нахождению показателя Херста для российских и зарубежных фондовых индексов.

И Мандельброт и Петерс анализировали подчиненность финансового рынка степенным законам достаточно давно. Мандельброт занимался вопросами наличия степенных законов в разных таймфрэймах рыночного движения еще с начала 60-х, в конце 60-х он начал проводить эксперименты с расчетом показателя Херста. Петерс, брокер по специальности, сотрудничал с Мандельбротом в его исследованиях. Последняя – его монография «Фрактальный анализ финансовых рынков», касающаяся *R/S* анализа финансовых рынков – была опубликована в 2004 году. В ней Петерс в основном анализировал валютные пары. В предыдущей книге «Хаос и порядок на рынке капитала» Петерсом были рассмотрены котировки акций и биржевых индексов и получены значения показателя Херста от 0,7. При этом Петерс тестирует систему на адекватность путем смешивания исходных данных и подтверждает наличие долговременной памяти.

Также расчет показателя Херста встречается в статьях русского трейдера немецкого происхождения Эрика Неймана. В своей статье «Расчет показателя Херста в целях выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков», опубликованной на сайте http://capital-times.com.ua, он, ссылаясь на Мандельброта, утверждает, что фрактальная размерность является обратной величиной к показателю Херста H. Целью данной работы Неймана является показать трендовый, то есть персистентный характер динамики рыночных котировок и опровергнуть гипотезу о ее случайном, гауссовском характере [4]. Очевидно, что для этого достаточно посчитать показатель Херста и убедиться, что он превышает 0,5. При этом Нейман использует несколько упрощенный алгоритм расчета показателя Херста. Во-первых, в качестве исходных данных он берет сами котировки, а не логарифмические преобразования по формуле (3). Логарифмические преобразования необходимы, чтобы привести разные выборки к единому виду (цены одной акции могут измеряться в долларах, а другой – в тысячах долларов). Во-вторых, в расчетах по некоторым валютным парам Нейман берет маленькую выборку >100 элементов. Петерс же брал объем исходной выборки не меньше 5000. Это целесообразно, так как регрессионное уравнение мы строим по количеству собственных делителей.

Мы решили повторить эксперименты Мандельброта, Петерса и Неймана на современных котировках биржевых индексов. В наших расчетах мы четко придерживались приведенного выше алгоритма. В качестве программного инструмента, как уже было сказано, использовались Microsoft Excel и Visual Basic for Applications. В качестве исходных данных были взяты котировки трех мировых индексов: российского индекса ММВБ и индексы двух экономически развитых, но при этом совершенно разных по принципам экономической политики стран: США и Китая. Это индексы Daw Jones Industrial Average и Shanghai Inc. Диапазон исходных данных составил три года: с 5 декабря 2008 г. по 5 декабря 2011 г. Следует отметить, что если бы мы взяли более ранний период, то это могло бы повлиять на чистоту эксперимента, так как в августе 2008 года произошел мировой финансовый кризис. При этом назвать расчеты абсолютно верными и не вызывающими сомнений тоже не представляется возможным, так как за этот период мы получили выборку всего из 728 элементов. Собственных делителей получилось девять – соответственно в логарифмическом регрессионном уравнении было всего девять наблюдений. Источником данных послужил сайт rbc.ru [4]. Итоги регрессионного анализа показаны *в табл. 1.*

Таблица 1.

Итоги регрессионного анализа

Индекс	H (показатель Херста)	t- статистика по H	F- статистика (значимость уравнения регрессии)
DJIA	0,6	31,05	96,7
Shanghai Inc	0,64	19,6	38,4
MICEX	0,57	4,05	164,7

Табличное значение $F_{0,05;\,1;\,7}$ равно 5,59, а $t_{0,05;\,1;\,7}$ – 2,36. Следовательно, все уравнения регрессии и параметры H значимы. Значения показателя Херста говорят о том, что динамика индексов персистентна. Все значения показателя Херста близки к 0,6.

Можно подтвердить данный вывод, построив также графики приращений котировок, а затем сравнив их с приращениями дневного курса GBP/USD, смоделированными Бенуа Мандельбротом еще в 60-х годах [1]. Приведенные ниже графики сам Мандельброт называет «антиквариатом в мире компьютерной графики», однако, они актуальны и сегодня, так как наглядно демонстрируют разницу между персистентной, случайной и антиперсистентной выборкой. Мандельброт смоделировал движение курса британского фунта по отношению к американскому доллару за один год. По оси *X* он отложил временной период в днях, а по оси *Y* дневное приращение курса GBP/USD. Мандельброт смоделировал три случая: случай, когда показатель Херста равен 0,1 (антиперсистентный процесс); 0,5 (случайное движение) и 0,9 (персистентный процесс).

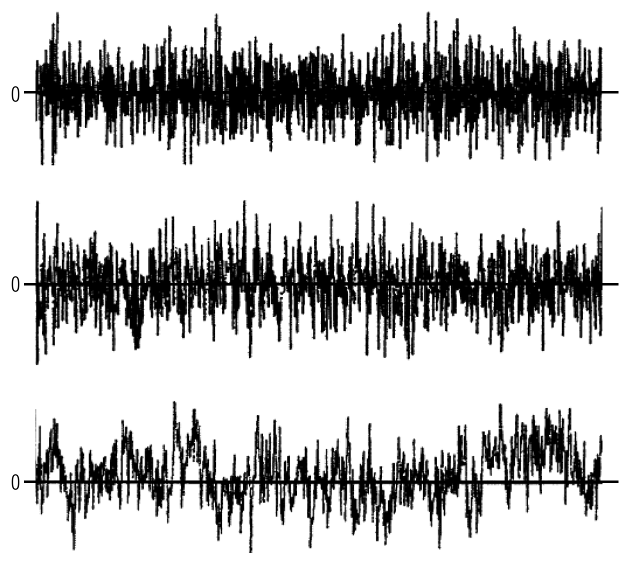

Рис. 1. График приращений «случайной» величины с показателями Херста 0,1(вверху), 0,5 (в середине) и 0,9 (внизу). Источник: [1]

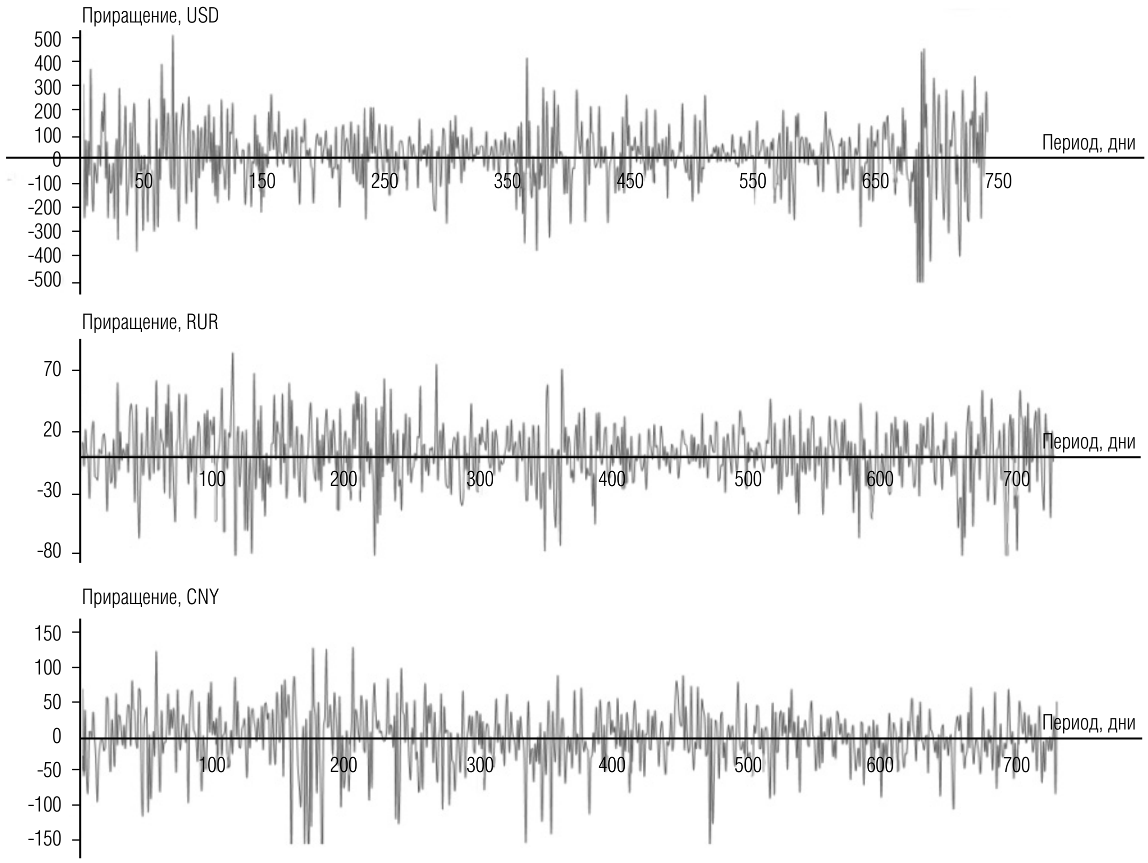

Рис. 2. График приращений котировок биржевых индексов: DJIA (вверху), MICEX (в середине), Shanghai Inc (внизу)

График, представленный на *рис. 1*, демонстрирует небольшие, но часто происходящие изменения, средний – независимые изменения, нижний – трендовость или долговременную память. Теперь изобразим подобные графики изменений анализируемых нами индексов. Мы брали дневные котировки за три года и рассматривали абсолютные приращения, то есть единицы измерения те же, что и в исходных котировках.

Как видно из рисунков, изменения котировок биржевых индексов более всего напоминают иллюстрацию Мандельброта персистентного процесса, что подтверждает наш расчет показателя Херста.

Помимо проверки значимости уравнения регрессии классическими статистическими методами, а также визуального сравнения графиков приращений, мы произвели наиболее надежную проверку правильности гипотезы о персистентности временных рядов биржевых котировок. Логично, что если временной ряд характеризуется долговременной памятью и показывает некую трендовость, то порядок уровней в ряде очень важен. Петерс предлагает перемешать значения уровней временного ряда и повторно посчитать показатель Херста. Если он также будет высок, значит, говорить о правильности выводов о наличии долговременной памяти еще рано.

Мы перемешали исходные временные ряды (всего три – по индексам DJIA, MICEX и Shanghai Inc) , осуществив несколько операций по изменения порядка элементов ряда и перемене элементов местами, используя алгоритмы на VBA. Далее мы полностью повторили алгоритм *R/S* анализа на уже перемешанных данных. Итоги показаны в *табл. 2.*

Таблица 2.

Итоги проверки гипотезы на персистетность

Индекс	H (показатель Херста)	t- статистика по H	F- статистика (значимость уравнения регрессии)
DJIA	0,21	15,6	48,67
Shanghai Inc	0,225	14,2	67,2
MICEX	0,2	11.02	26,66

Значения *F*- и *t*- статистик превышают табличные, следовательно, уравнение регрессии и параметр *H* значимы. Наша гипотеза о персистентности временного ряда биржевых котировок оказалась верной, так как прошла успешную проверку: при перемешивании данных показатель Херста для всех индексов стал значительно меньше.

5. Заключение

Классические методы анализа финансовых инвестиций оказались неприменимы в периоды интенсивных колебаний рынка и рыночных коллапсов. Экспериментально было показано, что рыночные котировки не подчиняются нормальному распределению. Диаграмма распределения вероятностей больше похожа на степенной закон, получивший название «Распределение Парето».

Над новой теорией динамики финансового рынка с 1960-х годов работал основатель фрактальной геометрии Бенуа Мандельброт. Затем эстафета была подхвачена профессиональным брокером Эдгаром Петерсом и другими аналитиками. Особый интерес представляет собой расчет показателя Херста, в зависимости от величины которого можно сделать вывод о персистентности (трендовости) либо случайном характере временного ряда. Персистентный ряд при этом обладает свойством самоподобия, из чего можно сделать вывод о его фрактальности и продолжать исследования в фрактальном направлении.

Мы рассчитали показатель Херста для трех индексов наиболее ярких современных мировых держав – российского ММВБ, американского DJIA и китайского Shanghai Inc. Из расчетов стало возможным сделать выводы о персистентности временных рядов.

Наши выводы были проверены тремя способами. Во-первых, была проверена значимость уравнения регрессии и параметра H. Во-вторых, мы сравнили графики приращений котировок с графиками приращений значений временного ряда, представленными Мандельбротом для персистентного, случайного и антиперсистентного процесса. Наиболее значимым является третий способ проверки – расчет показателя Херста на перемешанных данных. При наличии долговременной памяти порядок элементов важен, поэтому перемешанные данные должны показывать более низкое значение показателя Херста. В нашем случае перемешанные данные дали антиперсистентный процесс, следовательно, проверка подтвердила гипотезу. ■

6. Литература

1. Мандельброт Б., Хадсон Р. (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006.
2. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004.
3. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000.
4. Фон Нейман Э. Расчет показателя Херста в целях выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков. URL: http://capital-times.com.ua.