

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИЗМЕНЕНИЙ ГЛОБАЛЬНЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ТЕМПОРАЛЬНЫХ ОРГРАФОВ

В.А. Кохов,

кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики
на факультете экономики Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

В.В. Кохов,

магистрант кафедры прикладной математики Национального исследовательского
университета «Московский энергетический институт» (НИУ-МЭИ)

E-mail: viktor-kokhov@ya.ru

Адрес: г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

Предложены новые методы анализа глобальных и локальных свойств темпоральных орграфов на основе моделей их сложности. Модели сложности позволяют анализировать значимость темпоральных орграфов, их фрагментов и анализировать тенденции их изменения. Приведен сравнительный анализ двух подходов к определению локальных свойств, связанных с вычислением вкладов фрагментов в сложность темпоральных орграфов.

Ключевые слова: темпоральный орграф, модели сложности, сходство, локальный инвариант, глобальный инвариант, значимость фрагмента.

1. Введение

Обычно модели и методы теории графов используются для анализа отношений между элементами сложных структур различной природы [1]. При этом данные отношения между элементами являются постоянными и не меняются во времени. Такие графы в [2] названы «статическими». Если отношения между элементами структуры изменяются во времени, традиционные «статические» графы неприменимы для их описания и

моделирования. Как выделено в [3-6] в настоящее время наиболее актуальным направлением является разработка методов анализа графов с изменяемой структурой во времени (темпоральных орграфов (T -орграфов)). Работа [2] была началом исследований по графодинамике, т.е. по динамическому описанию структур. В ней выделены базовые классы задач, связанные с определением:

1) равновесного состояния графа и области сходимости к этому состоянию;

2) области циклического изменения состояния графа и длины цикла;

3) расстояния (сходства) между изменяемыми структурами графа;

4) других характеристик.

В качестве наиболее значимой выделялась задача определения расстояния, которое помогает ввести представление об устойчивости изменений структуры графа во времени (графовых траекторий) по отношению к малым возмущениям и о монотонности в смысле этого расстояния процессов в графодинамике. Примерами прикладных задач является анализ изменений:

1) административных структур, обычно описываемых орграфами-деревьями;

2) организации систем связи, снабжения и др.;

3) структуры построения номенклатуры товаров или изделий определенной категории;

4) организации ассоциативной памяти ЭВМ.

В графодинамике ставятся специфические задачи, которые не имеют аналогов в динамике обычно рассматриваемых объектов. В [2] в качестве примеров таких задач выделены:

1) задача определения в графе подграфа, который не меняется или «мало» меняется во времени;

2) задача о «сохранении коллективов», т.е. выделение группы вершин («коллектива»), которые при изменении структуры графа всегда подчинены общему для них «начальнику».

Во всех примерах структура адекватно отображается орграфом. В [3,4] отмечено, что в настоящее время одной из актуальных прикладных задач является задача анализа изменений во времени структур корпоративных социальных сетей (КСС), в особенности сетей коммуникаций сотрудников фирмы. Структурный анализ КСС позволяет:

1) осуществлять мониторинг структуры сети компании и ее изменений;

2) выявлять слабых и сильных акторов в сети;

3) корректировать и моделировать эффективную структуру сети;

4) оперативно выявлять конфликты акторов внутри фирмы;

5) анализировать создание сообществ по формальным и неформальным связям, что способствует созданию единой команды с общей целью;

6) направлять изменения структуры сети с целью повышения обоснованности управленческих решений.

Как выделено в [4], управление КСС, их структурой – новая область менеджмента.

В данной статье предлагаются два подхода к структурному анализу T -орграфов. Анализ основан на построении моделей сложности, позволяющих исследовать изменения локальных и глобальных свойств T -орграфов, определять сходство T -орграфов и выявлять тенденции изменения свойств.

Из анализа работ [7,8] следует, что существуют различные подходы к вычислению значений локальных свойств и связи их с глобальными характеристиками графа. В [7] для характеристики фрагмента $f \subseteq G$ графа с оставшейся частью используется «внешний» топологический индекс ($EFTI$), задаваемый выражением

$$EFTI(f) = TI(G) - [IFTI(f) + \sum_n IFTI(G - f)_n],$$

где $TI(G)$ – топологический индекс графа G ; $IFTI$ – «внутренний» топологический индекс фрагмента графа. Суммирование ведется по всем из n связным компонентам части $(G - f)$, получаемой удалением из G всех вершин, входящих в f , и инцидентных им ребер. Для трех видов индексов формулируются естественные требования

$$0 \leq EFTI(f) \leq TI(G), 0 \leq IFTI(G - f) \leq TI(G).$$

В [8] рассмотрена схема характеристики расположения фрагментов графа метрическими и цепными инвариантами, построенными на основе различных расстояний. Метрические инварианты вычисляются на единой структуре исходного графа без разделения его на три части. Таким образом, выделим два основных подхода к характеристике расположения фрагмента в графе:

1) значение инварианта фрагмента вычисляется на единой структуре графа;

2) значение инварианта фрагмента вычисляется с разделением графа на части.

В наиболее общем виде метод вычисления инвариантов, характеризующих расположение фрагментов в графах, и общие требования к их построению по первому подходу приведены в [9].

2. Основные определения

T -орграфом назовем тройку $G = (V^{(t)}, E^{(t)}, T)$, где $|V^{(t)}|$ – множество вершин орграфа в момент времени t с числом вершин $|V^{(t)}| = p$, $T = \{1, 2, \dots, t, \dots, M\}$ – множество натуральных чисел, определяющих (дискретное) время, $|E^{(t)}| = \{L_t\}$ – семейство соответствий или отображений, множества вершин $V^{(t)}$ в

себя в момент времени $t \in T$, т.е. $(\forall t \in T) f_t: V^{(t)} \rightarrow V^{(t)}$. Через tG обозначим T -орграф в момент времени t . Фрагмент f орграфа tG в момент времени t получается при удалении дуг или вершин и дуг.

Орграф $t_1G = (V^{(t_1)}, E^{(t_1)}, T)$ изоморфен орграфу $t_2G = (V^{(t_2)}, E^{(t_2)}, T)$ ($t_1G \approx t_2G$), если

$$\exists \varphi: (V^{(t_1)} \leftrightarrow V^{(t_2)}) \& (\forall v_i, v_j \in V^{(t_1)} [(v_i, v_j) \in E^{(t_1)} \leftrightarrow \leftrightarrow (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E^{(t_2)}])$$

где $\varphi(v_i), \varphi(v_j) \in V^{(t_2)}$. Орграф $t_1G = (V^{(t_1)}, E^{(t_1)}, T)$ изоморфно вкладывается в орграф $t_2G = (V^{(t_2)}, E^{(t_2)}, T)$ ($t_1G \subseteq {}^0 t_2G$), если в t_2G есть фрагмент

$$f = t_2G_* = (V_*^{(t_2)}, E_*^{(t_2)}, T),$$

для которого выполняется условие $t_2G_* \approx t_1G$. Множество всех изоморфизмов орграфа tG на себя образует группу по умножению подстановок φ и обозначается через $Aut(tG)$, порядок группы – через $|Aut(tG)|$. Под числом *канонических изоморфных вложений* tG_* в tG будем понимать величину, определяемую следующим образом:

$$w(tG_*, tG) = W(tG_*, tG) / |Aut(tG_*)|,$$

где $W(tG_*, tG)$ – число всех изоморфных вложений tG_* в tG .

Абстрактный тип k – произвольный T -орграф, определенный с точностью до изоморфизма. Группу его вершинных автоморфизмов обозначим через $Aut(k)$, множество всех канонических изоморфных вложений абстрактного типа k в орграф tG – через

$$F^{(k)}(tG) = \{tf_1^{(k)}, tf_2^{(k)}, \dots, tf_m^{(k)}\},$$

$|F^{(k)}(tG)|$ – количество фрагментов типа k , а $nk(G)$ – число типов фрагментов в tG . Если на множестве вершин типа фрагмента k и орграфа tG задана нумерация, то фрагмент $tf^{(k)}$ орграфа tG может быть представлен помеченными фрагментами $tf^{(lk)}$, когда каждой вершине типа фрагмента k сопоставляется номер вершины орграфа tG , которой она соответствует при вложении. Число помеченных фрагментов, представляющих один и тот же фрагмент tG , равно $|Aut(k)|$.

Пусть $Aut^{(k)}(tG)$ является индуцированным представлением группы $Aut(tG)$ и определяет симметрию расположения фрагментов типа k в tG . Под k -автоморфизмом орграфа tG будем понимать подстановку g^* на множестве $F^{(lk)}(tG)$, помеченных фрагментов типа k орграфа tG (или канонических изоморфных вложений), индуцированную некоторым вершинным автоморфизмом g орграфа tG . В

процессе индуцирования помеченный фрагмент $f_i^{(lk)} \in F^{(lk)}(tG)$, заданный каноническим изоморфным вложением (v_1, v_2, \dots, v_n) орграфа tG , переходит в помеченный фрагмент $f_j^{(lk)} \in F^{(lk)}(tG)$, канонический вид которого получен канонизацией вложения (u_1, u_2, \dots, u_n) , где $u_i = g(v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n – число вершин фрагмента типа k . *Группой k -автоморфизмов* tG ($Aut^{(k)}(tG)$ или k -группой) будет группа подстановок, носителем которой является все множество k -автоморфизмов для данного k , а групповой операцией – операция произведения подстановок. Тот факт, что множество k -автоморфизмов образует группу, непосредственно следует из свойств $Aut(tG)$. Степень k -группы $|F^{(lk)}(tG)|$ равна числу канонических изоморфных вложений абстрактного типа k в орграф tG , а порядок меньше или равен порядку $Aut(tG)$. Последнее обосновано тем, что два различных нетождественных вершинных автоморфизма могут индуцировать один и тот же k -автоморфизм. Все понятия, связанные с анализом $Aut^{(k)}(tG)$, определяются аналогично понятиям, связанным с анализом $Aut(tG)$ (например, орбиты k -группы). Орбиты k -группы точно характеризуют симметрию расположения фрагментов типа k , в орграфе tG .

Основным инструментом при вычислении глобальных (локальных) характеристик орграфа tG является использование инвариантов орграфа tG (инвариантов, характеризующих расположение фрагментов в tG). Обозначим множество всех T -орграфов через \mathfrak{R} . Пусть R – отношение «быть изоморфными» орграфами tG , а Q – непустое множество с отношением эквивалентности τ (множество чисел, векторов, матриц, орграфов и т.д.). Функция IN заданная на множестве \mathfrak{R} и принимающая значения в Q , называется инвариантом орграфа tG , если справедливо условию

$$\forall t_i G, t_j G \in \mathfrak{R} [t_i G(R)t_j G \rightarrow IN(t_i G)(\tau)IN(t_j G)].$$

Пусть $F^{(lk)}(tG) = \{tf_1^{(lk)}, tf_2^{(lk)}, \dots, tf_m^{(lk)}\}$ обозначает множество помеченных фрагментов типа k в орграфе tG . Инвариантом, характеризующим расположение фрагмента $tf^{(lk)}$, называется функция $in(tf^{(lk)})$, заданная на множестве $F^{(lk)}(tG)$, принимающая значения в Q и удовлетворяющая условию

$$\forall tf_i^{(lk)}, tf_j^{(lk)} \in F^{(lk)}(tG) [tf_i^{(lk)}(\xi)tf_j^{(lk)} \rightarrow in(tf_i^{(lk)})(\tau)in(tf_j^{(lk)})],$$

где ξ – отношение эквивалентности «принадлежать одной и той же орбите k -группы». Все неопределяемые ниже понятия можно найти в [1].

3. Модели структурной спектральной сложности для определения глобальных свойств *T*-орграфов

Концептуальные и математические модели для определения сложности графов, методы построения моделей и результаты их исследования на точность решения задач различения и определения сходства графов приведены в [9-10]. Результаты решения задач различения *орграфов* на основе моделей сложности приведены в [11]. Успех в исследовании структурной сложности и сходства систем неразрывно связан с разработкой методологии построения и исследования структурных инвариантов, позволяющих характеризовать орграф и вычислять вклад фрагментов в его сложность [1,9-11]. Ниже рассмотрены шесть видов инвариантов: 1) структурный спектр; 2) длина структурного спектра; 3) полный структурный спектр; 4) длина полного структурного спектра; 5) индекс сложности; 6) вектор-индекс сложности. Все они характеризуют структурную спектральную сложность (СС-сложность) *tG* в расширяемых наборах (базисах) фрагментов. Индексы и вектор-индексы СС-сложности *tG* характеризуют их количественный и качественный состав в заданном наборе (базисе) фрагментов.

Под структурным спектром $SS(tG / B)$ орграфа *tG* в базисе $B = \langle b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_{k_1} \rangle$ будем понимать запись следующего вида

$$SS(tG / B) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{k_1} \rangle,$$

где $\alpha_i = 1$, если $b_i \in B$ изоморфно вкладывается в *tG* и $\alpha_i = 0$ в противном случае. Через

$$L^{(SS)}(tG / B) = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i$$

обозначим длину структурного спектра *tG* в базисе *B*.

Пусть для орграфа *G* построен его полный структурный спектр (ПСС) в базисе *B*:

$$FSS(tG / B) = \langle wb_1, wb_2, \dots, wb_i, \dots, wb_{k_1} \rangle,$$

где b_i – фрагмент базиса; w_i – число канонических изоморфных вложений фрагмента b_i в *tG*; k_1 число фрагментов базиса *B*, относительно которого характеризуется сложность *tG*. Очевидно, что

$$w(K_1) = p, w(K_2) = q.$$

Примем $ISC(K_1) = 1, ISC(K_2) = 3$. Так как для любого фрагмента t_i орграфа *tG* можно определить его

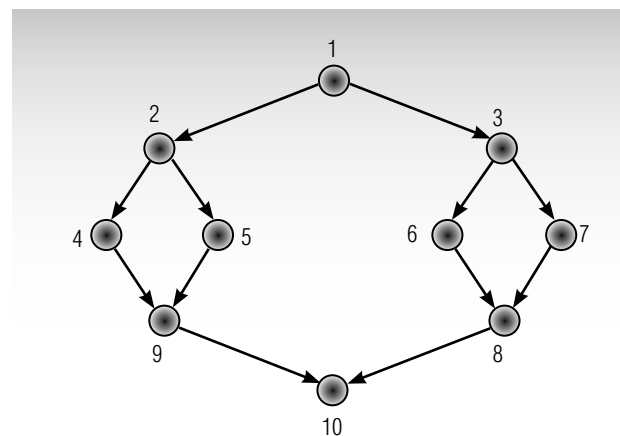


Рис. 1. Пример диаграммы *tG*

ПСС, а для каждого фрагмента от фрагмента *tG*, можно построить его ПСС и т.д., то рекурсивным методом всегда можно вычислить индекс сложности (*ISC*) и вектор-индекс сложности (*V_ISC*) орграфа *tG* в базисе *B*:

$$ISC(tG / B) = w_1 ISC(b_1) + w_2 ISC(b_2) + \dots + w_{k_1} ISC(b_{k_1}); \quad (1)$$

$$V_ISC(tG / B) = \langle w_1 ISC(b_1); w_2 ISC(b_2); \dots; w_{k_1} ISC(b_{k_1}) \rangle. \quad (2)$$

Под длиной ПСС в базисе *B* будем понимать следующую величину

$$L^{(FSS)}(tG / B) = \sum_{i=1}^{k_1} w_i.$$

Через $V_RSC(tG / B)$ обозначим вектор-индекс относительной сложности орграфа *tG* в базисе *B*, где

$$V_RSC(tG / B) = \langle w_1 ISC(b_1) / ISC(tG); \dots; w_{k_1} ISC(b_{k_1}) / ISC(tG) \rangle.$$

Вычисление значений $V_RSC(tG / B)$ позволяет определять суммарную относительную значимость фрагментов b_i базиса *B* для каждого типа *k* в общей сложности *tG*. В [9] предложен метод вычисления значений абсолютных и относительных вкладов для каждого отдельного фрагмента графа в его сложность с учетом значимости вершин и ребер в разных предметных областях.

Пусть $P = \langle P_0, P_1, \dots, P_i, \dots, P_{(p-1)} \rangle$ обозначает базис путей, где P_i – путь с числом дуг *i*. Тогда для *tG* (см. рис. 1) вычислим:

$$SS(tG / B) = \langle 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle;$$

$$FSS(tG / B) = \langle 10, 12, 12, 8, 4, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle.$$

Согласно формулам (1) и (2) вычислим:

$$ISC(tG/B) = 10ISC(P_0) + 12ISC(P_1) + 12ISC(P_2) + 8ISC(P_3) + 4ISC(P_4) = 826;$$

$$ISC(P_0/B) = 1; ISC(P_1/B) = 3;$$

$$ISC(P_2/B) = 3ISC(P_0) + 2ISC(P_1) = 9;$$

$$ISC(P_3/B) = 4ISC(P_0) + 3ISC(P_1) + 2ISC(P_2) = 31;$$

$$ISC(P_4/B) = 5ISC(P_0) + 4ISC(P_1) + 3ISC(P_2) + 2ISC(P_3) = 106.$$

В итоге, для tG получим:

$$ISC(tG/B) = 826; V_ISC(tG/B) = \langle 10; 36; 108; 248; 424 \rangle;$$

$$V_RSC(tG/B) = \langle 0,0121; 0,0436; 0,1308; 0,3002; 0,5133 \rangle;$$

$$L^{(SS)}(tG/B) = 5; L^{(FSS)}(tG/B) = 46.$$

Заметим, что проблема определения всех простых путей всех возможных длин между парой вершин орграфа является NP -полной проблемой [12]. Выделим, что по разнице значений индексов СС-сложности легко определить количественную меру сходимости орграфов и построить граф их попарного сходства с последующей кластеризацией [11]. Кроме того, по изменениям значений индексов СС-сложности можно проводить мониторинг изменения структуры tG для заданного промежутка времени и определять тенденции изменения сложности структуры.

4. Метод мониторинга изменений интегральных свойств T -орграфов на основе анализа моделей сложности

Рассмотрим задачу анализа изменения значений анализируемых моделей СС-сложности tG в диапазоне времени от t_1 до t_5 включительно. Пусть tG в момент времени t_1 имел структуру t_1G , а в следующие моменты времени $t_2 - t_5$ — соответственно $t_2G - t_5G$ (рис. 2). Рассмотрим наиболее сложный случай изменения структуры, когда число вершин и дуг (ребер) остается постоянным, а меняется структура связей вершин.

В табл. 1 приведены результаты определения значений трех видов моделей СС-сложности.

Таблица 1.

Значения трех видов моделей СС-сложности

t	$L^{(SS)}(tG/B)$	$L^{(FSS)}(tG/B)$	$ISC(tG/B)$
t_1	4	37	1156
t_2	4	38	1112
t_3	4	35	847
t_4	4	33	785
t_5	4	34	644

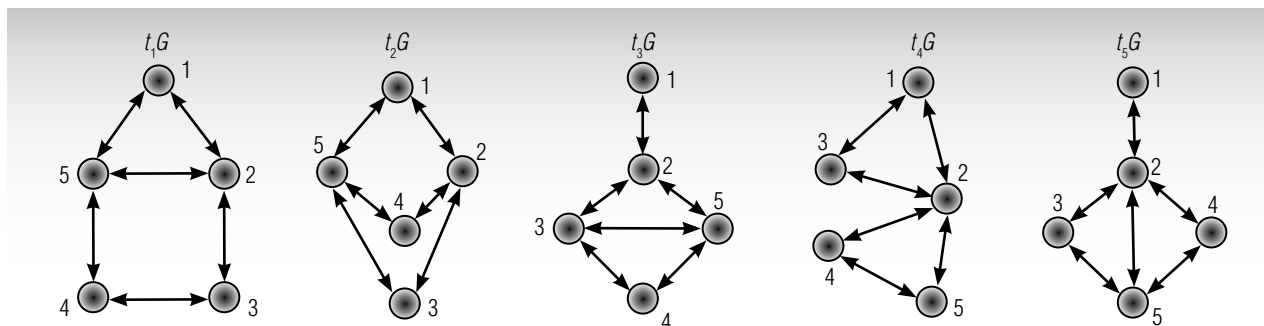


Рис. 2. Диаграммы tG в диапазоне времени от t_1 до t_5 включительно

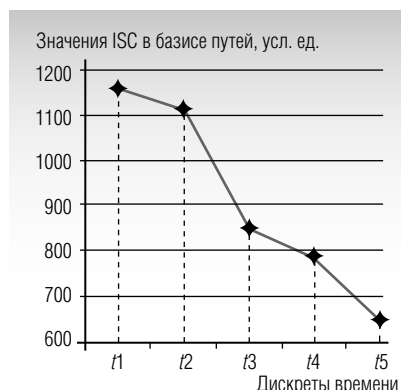


Рис. 3. График изменения значений индекса сложности

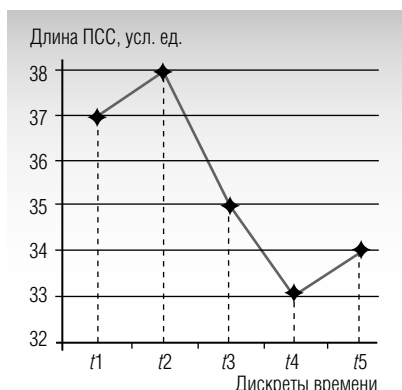


Рис. 4. График изменения значений длины полного структурного спектра

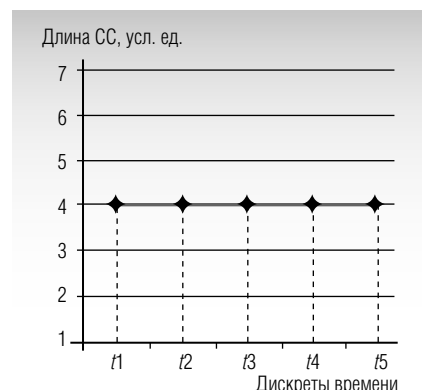


Рис. 5. График изменения значений длины структурного спектра

На рис. 3-5 показаны графики изменения значений $ISC(tG/P)$, $L^{(FSS)}(tG/B)$, $L^{(SS)}(tG/B)$. Значения $ISC(tG/P)$ характеризуют интегральную протяженность и разветвленность связей структуры tG в заданный момент времени t .

Анализ графиков позволяет определять тенденции изменения значений моделей СС-сложности, а модуль разности дает количественную меру ее изменения и меру сходимости. На рис. 6, 7 приведены гистограммы изменения ПСС и значений компонентов вектор-индекса T -орграфа в базисе P .

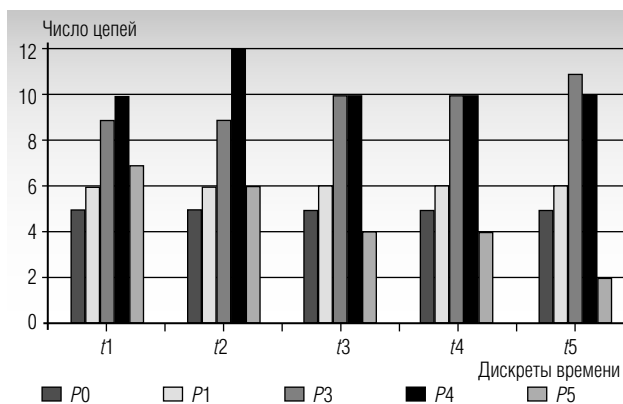


Рис. 6. Гистограммы изменения значений полного структурного спектра tG в базисе P

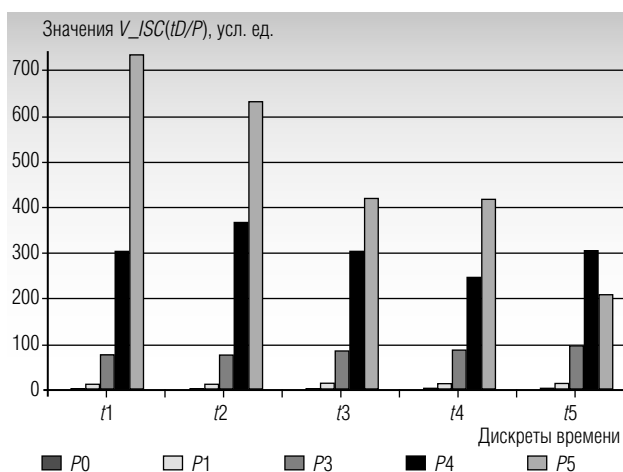


Рис. 7. Гистограммы изменения значений компонентов вектор-индекса T -орграфа в базисе P

Анализ данных (рис. 7) приводит к выделению тенденции уменьшения СС-сложности T -орграфа. Вклад цепей длины 2 и 3 возрос, что привело к увеличению разветвленности связей вершин, а вклад цепей длины 4, как максимально значимых в вычислении общей сложности, снизился, что привело к уменьшению общей протяженности T -орграфа.

Если вместо путей использовать базис контуров, то можно определять и анализировать тенденции изменения диапазона $diapC(tG) = (l_{max} - l_{min})$ об-

хвата контурной связностью вершин tG , где l_{max} – максимальная, а l_{min} – минимальная длина контура (цикла). Базис каркасов более точно характеризует разветвленность, а базис клик – плотность tG . Чем больше клик в tG , тем больше максимально устойчивых по связям подмножеств вершин (акторов в КСС). Наиболее точно характеризует СС-сложность базис всех связных фрагментов tG . Однако, как показали вычислительные эксперименты для tG с $p > 40$, формирование такого базиса и вычисление значений моделей сложности практически невыполнимо в приемлемое время.

5. Метод мониторинга изменения локальных свойств, вычисленных на неразрывной структуре T -орграфа

Ниже в качестве локальных свойств рассматриваются вклады вершин ($irc(v^{(t)} / P)$) и вклады дуг (ребер) ($irc(e^{(t)} / P)$) в сложность tG , вычисленные по формулам, приведенным в [13]. Значения вкладов вершин и усредненных нормализованных значений вкладов вершин ($irc_{av}(v / P)$) приведены в табл. 2 и вычислялись на неразрывной структуре tG . Для определения тенденций изменения на рис. 8 приведены гистограммы значений $irc(v^{(t)} / P)$ и $irc_{av}(v / P)$. Для вершин v_1, v_3, v_4, v_5 наметилась тенденция увеличения вкладов (значимости), для v_2 – уменьшения вклада. Вершины по их значимости получили следующую упорядоченность $v_1 > v_4 > v_3 > v_5 > v_2$. Аналогичные результаты для ребер $e_{ij} = (v_i, v_j)$ ($irc(e^{(t)} / P) = irc1, irc(e / P) = irc2$) приведены в табл. 3 и на рис. 9.

Для ребер e_{12}, e_{45} выделилась тенденция увеличения вкладов, для e_{15}, e_{23}, e_{34} – уменьшения вкладов, а для e_{25} – почти стабильности значений вкладов. Ребра по уменьшению значимости получили следующую упорядоченность

$$e_{45} > e_{12} > e_{23} > e_{34} > e_{35} > e_{13} > e_{15} > e_{24} > e_{25}.$$

Таблица 2.

Значения нормализованных вкладов вершин и усредненных нормализованных вкладов вершин в сложность tG

$V(tG)$	$irc(v^{(t_1)})$	$irc(v^{(t_2)})$	$irc(v^{(t_3)})$	$irc(v^{(t_4)})$	$irc(v^{(t_5)})$	$irc_{av}(v)$
v_1	0,2560	0,2661	0,3370	0,2420	0,2857	0,27736
v_2	0,1522	0,1007	0,1009	0,0318	0,0869	0,09450
v_3	0,2197	0,2661	0,1505	0,2420	0,2437	0,22440
v_4	0,2197	0,2661	0,2609	0,2420	0,2437	0,24648
v_5	0,1522	0,1007	0,1505	0,2420	0,1397	0,15702

Таблица 3.

Значения нормализованных вкладов ребер и усредненных нормализованных вкладов ребер в сложность tG

$E(tG)$	$irc(e^{(t_1)})$	$irc(e^{(t_2)})$	$irc(e^{(t_3)})$	$irc(e^{(t_4)})$	$irc(e^{(t_5)})$	$irc_{av}(e)$
e_{12}	0,1928	0,1666	0,3396	0,0666	0,2887	0,21086
e_{13}	–	–	–	0,3666	–	0,07332
e_{15}	0,1928	0,1666	–	–	–	0,07188
e_{23}	0,1602	0,1666	0,0801	0,0666	0,1056	0,11582
e_{24}	–	0,1666	–	0,0666	0,1056	0,06776
e_{25}	0,0451	–	0,0801	0,0666	0,0399	0,04634
e_{34}	0,2484	–	0,2191	–	–	0,09350
e_{35}	–	0,1666	0,0617	–	0,2300	0,09166
e_{45}	0,1602	0,1666	0,2191	0,3666	0,2300	0,22850

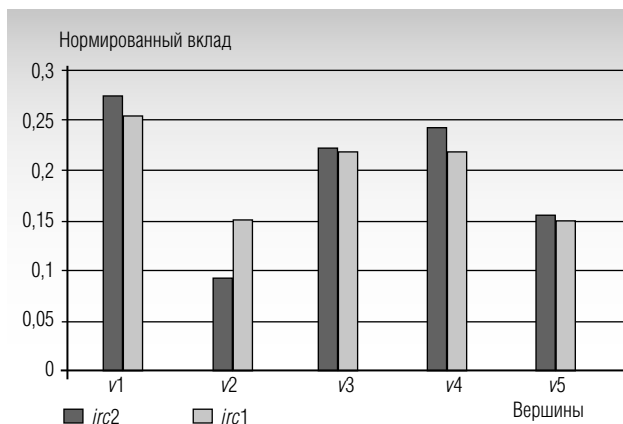


Рис. 8. Гистограммы значений нормализованных вкладов вершин в момент времени t_1 ($irc1$) и усредненных нормализованных вкладов вершин ($irc2$) в сложность tG

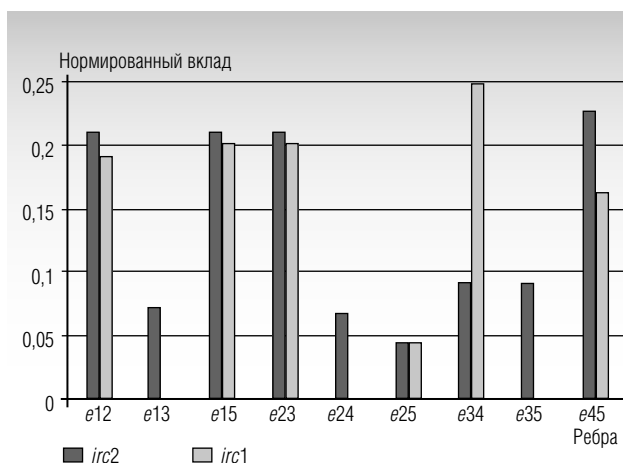


Рис. 9. Гистограммы значений нормализованных вкладов ребер в момент времени t_1 ($irc1$) и в усредненных нормализованных вкладов ребер ($irc2$) в сложность tG

6. Метод мониторинга изменения локальных свойств, вычисленных на структуре T -орграфа, разделенной на части

Введем новые характеристики, необходимые для проведения исследования динамики изменения значимости вершин и дуг T -орграфов по устойчивости к изменениям структуры.

Определение 1. Индексом абсолютного вклада вершины $v \in V$ в сложность орграфа tG в базе B называется величина, вычисляемая по формуле $iac(v, tG / B) = ISC((tG - v) / B)$.

Определение 2. Индексом абсолютного вклада всех вершин в сложность орграфа tG в базе B называется величина, вычисляемая по формуле

$$IAC(V, tG / B) = \sum_{v \in V} iac(v, tG / B).$$

Определение 3. Индексом относительного вклада вершины $v_j \in V$ в сложность орграфа tG в базе B называется величина, вычисляемая по формуле

$$irc(v_j, tG / B) = ISC((tG - v_j) / \sum_{i=1}^p ISC(tG - v_i / B)).$$

На рис. 10 приведены гистограммы значений $irc(v, t_1 G / B) = irc1$ и средних значений $irc_{av}(v, tG / B) = irc2$, позволяющие выделить тенденции изменения вкладов.

При удалении вершины v происходит разрушение орграфа. Чем сильнее разрушение, т.е. чем меньше значение $irc(v, tG / B)$, тем больше значимость вершины v в структуре tG . Из анализа данных (рис. 10) следует, что значимость вершин v_1, v_5

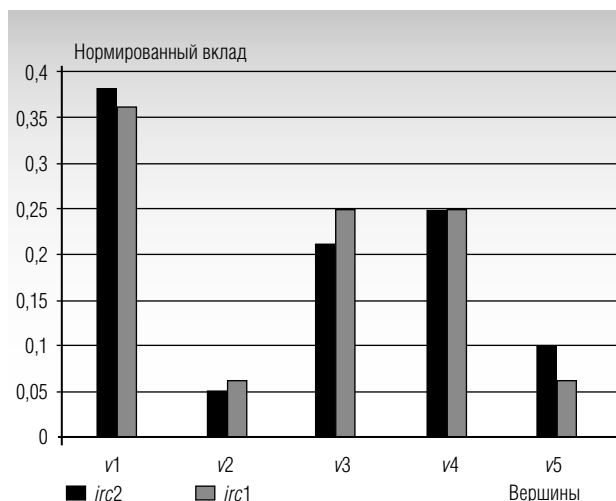


Рис. 10. Гистограммы значений нормализованных вкладов вершин в момент времени t_1 ($irc1$) и усредненных значений нормализованных вкладов вершин ($irc2$) в сложность tG

уменьшилась, а остальных вершин увеличилась. Вершины по их значимости получили следующую упорядоченность $v_2 > v_5 > v_3 > v_4 > v_1$. Метод определения $irc(v, tG/P)$ является методом определения классов эквивалентного расположения вершин в tG . Предельным числом таких классов является число орбит группы $Aut(tG)$.

Определим новые характеристики для вычисления значимости дуг.

Определение 4. Индексом абсолютного вклада дуги $e_j \in E$ в сложность орграфа tG в базисе B называется величина, вычисляемая по формуле

$$iac(e_j, tG/B) = ISC((tG - e_j)/B).$$

Определение 5. Индексом абсолютного вклада всех дуг в сложность орграфа tG в базисе B называется величина, определяемая как

$$IAC(E, tG/B) = \sum_{e_j \in E} iac(e_j, tG/B).$$

Определение 6. Индексом относительного вклада дуги $e_j \in E$ в сложность орграфа tG в базисе B называется величина, вычисляемая по формуле

$$irc(e_j, tG/B) = ISC(tG - e_j) / \sum_{i=1}^q ISC(tG - e_i/B).$$

Метод определения $irc(e, tG/B)$ является методом решения задачи определения классов эквивалентного расположения дуг в tG . Предельным числом таких классов является число орбит группы $Aut^{(k)}(tG)$, где $k=p_1$. В табл. 4 приведены значения $irc(e, tG/P)$ в анализируемые моменты времени, а на рис. 11 – гистограммы значений $irc(e, t_1G/P) = irc1$ для каждой дуги tG и средних значений по интервалу $t_1 - t_5$ нормализованных вкладов $irc_{av}(e, tG/P) = irc2$.

Из анализа данных (табл. 4, рис. 11) следует, что для ребер e_{12}, e_{23} выделилась тенденция уменьшения вкладов, для $e_{15}, e_{25}, e_{34}, e_{45}$ – увеличения вкладов. Упорядоченность ребер по их значимости имеет вид $e_{34} > e_{13} > e_{15} > e_{35} > (e_{24}, e_{45}) > e_{12} > e_{25} > e_{23}$.

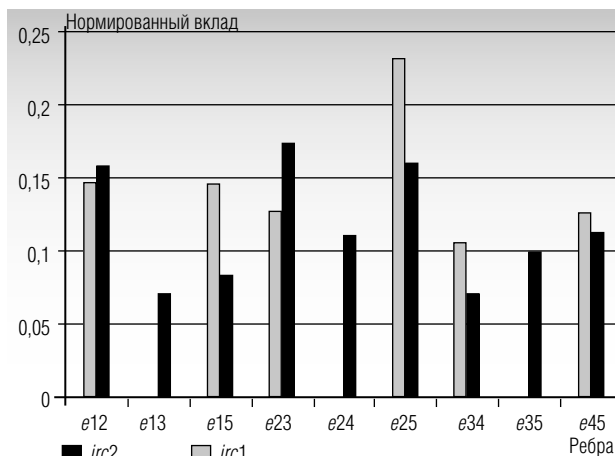


Рис. 11. Гистограммы значений нормализованных вкладов ребер в момент времени t_1 и средних нормализованных вкладов ребер в сложность tG

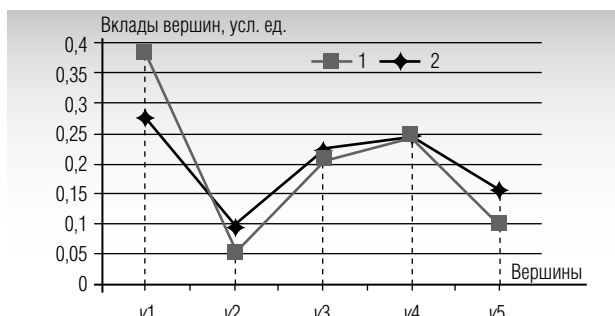


Рис. 12. Графики изменения значений нормализованных вкладов вершин tG по двум подходам

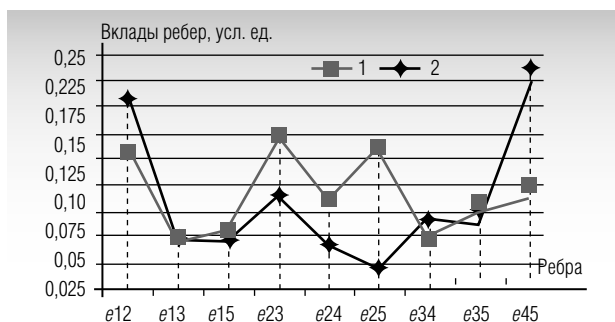


Рис. 13. Графики изменения значений нормализованных вкладов ребер tG по двум подходам

Таблица 4.

Значения нормализованных вкладов ребер в анализируемые моменты времени и средних нормализованных вкладов ребер в сложность tG

t	e_{12}	e_{13}	e_{15}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{34}	e_{35}	e_{45}
t_1	0,147	–	0,147	0,128	–	0,234	0,107	–	0,128
t_2	0,167	–	0,167	0,167	0,167	–	–	0,167	0,167
t_3	0,123	–	–	0,182	–	0,182	0,152	0,209	0,152
t_4	0,198	0,3666	0,104	0,198	0,198	0,198	0,104	–	–
t_5	0,160	–	–	0,197	0,197	0,197	–	0,124	0,124
$irc_{av}(e)$	0,1589	0,0733	0,0836	0,1743	0,1124	0,1622	0,0728	0,0999	0,1142

7. Сравнение двух подходов к вычислению вкладов фрагментов в сложность

На рис. 12, 13 показаны графики изменения значений вкладов $irc_{av}(v, tG/P)$, вычисленных по двум подходам.

Содержательно, вклад фрагмента по второму подходу характеризует степень значимости разрушения структуры после его удаления, а по первому подходу – степень значимости в общей протяженности и разветвленности по путям, включающим анализируемый фрагмент. В табл. 5 приведена матрица достроек цепей p_2 до фрагментов базиса P для t_1G и значения вкладов цепей $irc(p_2^{(i)}, tG/P)$, вычисленных по двум подходам.

Таблица 5.

Значения матрицы достроек и значения нормализованных вкладов цепей по двум подходам

№	Цепи $p_2^{(i)}$	Базис			$irc(p_2^{(i)}, tG/P)$	
		P_2	P_3	P_4	Подход 1	Подход 2
1	234	1	3	3	0,1893	0,1143
2	345	1	3	3	0,1893	0,1143
3	215	1	2	2	0,1289	0,1636
4	154	1	2	2	0,1289	0,1069
5	123	1	2	2	0,1289	0,1069
6	125	1	1	1	0,0684	0,0985
7	152	1	1	1	0,0684	0,0985
8	325	1	3	0	0,0490	0,0985
9	254	1	3	0	0,0490	0,0985

Анализ результатов (рис. 12-15, табл. 5) и результатов объемных вычислительных экспериментов для случайных орграфов привели к следующим выводам:

- 1) два подхода вместе дают более точный анализ значимости фрагментов, характеризуемых в более широком аспекте;
- 2) существуют бесконечные семейства орграфов, для которых удаление фрагментов из разных орбит групп $Aut^{(k)}(tG)$, где $k = P_0, P_1, \dots, P_{(p-1)}$, приводит к изоморфным частям орграфов и, следовательно, значения вкладов по второму подходу одинаковые там, где они должны быть разными;
- 3) результаты вычисления вкладов фрагментов tG по первому подходу являются более точными, так как чаще приводят к определению орбит групп $Aut^{(k)}(tG)$, где $k = P_0, P_1, \dots, P_{(p-1)}$;
- 4) время решения задач по второму подходу больше, чем по первому подходу. Так, например, при

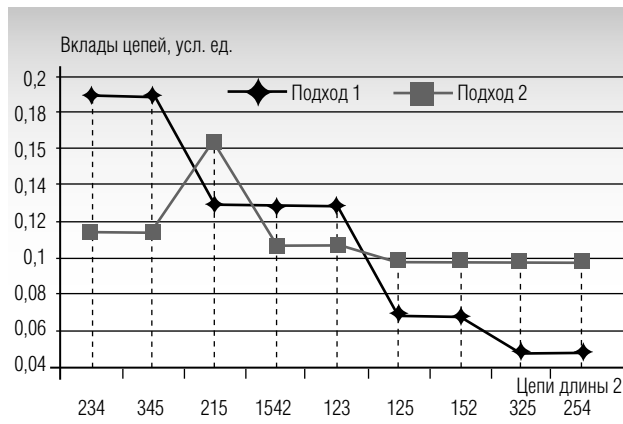


Рис. 14. Значения нормализованных вкладов цепей по двум подходам

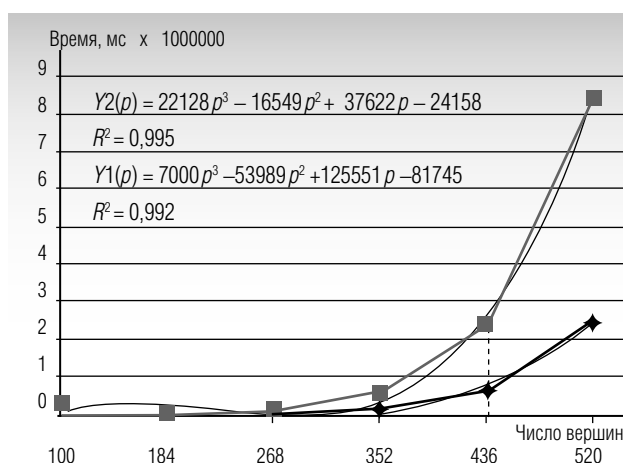


Рис. 15. Экспериментальные оценки вычислительной сложности решения задач по двум подходам

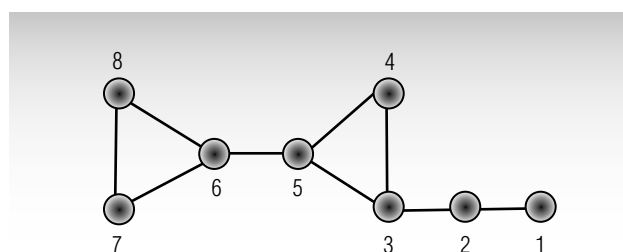


Рис. 16. Пример графа с изоморфными примарными подграфами для неавтоморфных вершин

анализе орграфов с числами $100 \leq p < 600$ и средней степенью (суммой полустепеней исхода и захода) равной четырем, экспериментальные оценки времени вычисления $irc(v, tG/P_{0-6})$ имеют вид, представленный на рис. 15.

На рис. 16 приведен пример графа, удаление вершин v_3 или v_6 , принадлежащих разным орбитам $Aut(G)$, приводит к изоморфным примарным под-

графам. Для графа $t_1 G$ (рис. 2) удаление цепей 125 или 254, принадлежащих разным орбитам группы $Aut^{(P_2)}(tG)$, приводит к изоморфным частям, а значит и к одинаковым значениям вкладов этих цепей (см. табл. 5).

8. Заключение

В работе рассмотрены новые методы структурного анализа T -орграфов. Они позволяют исследовать как локальные, так и глобальные структурные свойства T -орграфов, выявить тенденции их изменения

во времени. Сравнение двух подходов к вычислению вкладов фрагментов в общую сложность привело к выделению первого подхода, как наиболее точного. Предложенные модели сложности можно рассматривать как систему иерархического уточняющего анализа, позволяющего решать задачи исследования динамических свойств T -орграфов, в частности, монотонности их изменения. Методы анализа T -орграфов реализованы в АСНИ «Мастерская граф-моделей» [13] и используются в учебном процессе НИУ ВШЭ и НИУ МЭИ. ■

Литература

1. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / М.И.Нечепуренко, В.К.Попков, В.А.Кохов и др. – Новосибирск: Наука, 1990.
2. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики) / М.А.Айзерман, Л.А.Гусев, С.В.Петров, И.М.Смирнова // АИТ. – 1977. – № 7. – С. 136-151.
3. Wang H., Aggarwal C.C. Managing and Mining Graph Data. – Springer, 2010.
4. Jackson M.O. Social and Economic Networks. – Princeton University Press, 2008.
5. Берштейн Л.С., Боженьюк А.В. Использование темпоральных графов как моделей сложных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 4 (105). – С. 198-203.
6. Bramsen P.J. Doing Time: Inducing Temporal Graphs. Technical report. – Massachusetts Institute of Technology, 2006.
7. Mekenyan O., Bonchev D. Topological indices for molecular fragments and new graph invariants // Journal of Mathematical Chemistry. – 1988. – № 3. – P. 347-375.
8. Skorobogatov V.A., Dobrynin A.A. Metric analysis of graphs // MATCH – Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. – 1988. – № 23. – P. 105-151.
9. Кохов В.А. Концептуальные и математические модели сложности графов. – М: Изд-во МЭИ, 2002.
10. Кохов В.А. Граф-модели для анализа сходства структур на основе их сложности / Одиннадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ-2008: Труды конференции. В 3-х т. – Том 2. – М.: ЛЕНАНД, 2008. – С. 70-78.
11. Кохов В.А., Кохов В.В. Метод решения задачи различения орграфов на основе сложности // Бизнес-информатика. – 2011. – № 1 (15). – С. 11-23.
12. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.
13. Kokhov V.A., Neznanov A.A., Tkachenko S.V. Integrated research environment «Graph Model Workshop» // Fourth conceptual structures tool interoperability workshop (CS-TIW'09). – Moscow, Russia, 2009. – P. 7-12.