

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОИЗВОДСТВА-ПОТРЕБЛЕНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА, СТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

*М.А. Ивлев,*

*кандидат технических наук, доцент Нижегородского государственного  
технического университета им. Р.Е. Алексеева*

*E-mail: ivlev-ma@yandex.ru*

*Адрес: г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24*

*В рамках теории производства-потребления товаров и услуг в открытых социально-экономических системах предложены математические модели продукции, описывающие её соответствие запросам потребителя. Основой моделей является конечный оргграф с потоками. Обоснован способ минимального разбиения графа на покрывающие его множества независимых дуг, сформулированы правила вершин. На основе анализа компонентов оргграфа определены целевые функции и необходимые ограничения для решения ряда оптимизационных задач.*

**Ключевые слова:** теория производства-потребления, задачи оптимизации, конечный плоский оргграф с потоками, целевые функции и ограничения.

## 1. Предметная область и задачи математического моделирования

Как показано в работах [1-3], в задачах управления современными субъектами общественного производства в их состав следует включать как необходимый компонент категорию потребителей, что позволяет ввести в обиход новый класс производственных в широком смысле систем, определенный как системы производства-потребления. Ключевые процессы, определяющие эффективность их функционирования, описываются предложенной автором парадигмой

производства-потребления дифференцированной продукции – концепции, рассматривающей системы производства-потребления как открытые социально-экономические системы [3]. В этих системах управленческие воздействия имеют вид решений, самостоятельно принимаемых индивидуумами – лицами, принимающими решения (ЛПР). Указанная выше парадигма (далее – теория производства-потребления) рассматривает ЛПР двух групп. К первой из них относятся потребители продукции, приобретающие её в соответствии с желаемым качеством жизни, с одной стороны, и

покупательской способностью, с другой стороны. Ко второй группе ЛПР относятся руководители и специалисты производственной подсистемы социально-экономической системы – собственно производственного предприятия, определяющие виды его деятельности, модели продукции, её параметры и объемы выпуска – характеристики, определяемые нами как концептуальные.

Предприятие как хозяйствующий субъект открытой социально-экономической системы будет иметь долговременную экономическую устойчивость и успешно развиваться при условии, что ЛПР второй категории будут действовать с учетом решений, принимаемых и изменяемых ЛПР первой категории. При выполнении этого условия будет реализован актуальный принцип управления производством продукции на основе «голоса потребителя» [4]. Итак, областью функционирования исследуемых систем является социально-экономическая сфера, а их активными компонентами являются ЛПР, которые в той или иной степени обладают свободой выбора и поступают в соответствии с личными предпочтениями.

Развитая теория производства-потребления [2] позволяет на семантическом уровне интуитивно доступно проектировать и производить дифференцированную продукцию, свойства которой наилучшим образом отвечают запросам потребителей. Однако для исключения эвристических ошибок в стратегическом планировании производственной деятельности, в том числе в задачах определения ряда численных оценок перспективной продукции и требуемых ресурсов промышленного предприятия, необходимо применить строгую технологию оптимизации. Постановка и процедура решения оптимизационной задачи в общем случае представляют собой поиск точного верхнего (нижнего или заданного) значения некоторого функционала (во многих случаях – целевой функции) на множестве допустимых решений [5].

Указанная теория производства-потребления и её интерпретация, предложенная автором в виде цепочечных бинарных структур [6], предоставляют возможность сделать первый шаг математического моделирования. Таковым являются выбор и обоснование соответствующего этой структуре вида математической модели, на основе анализа которой на следующих шагах конструируется целевая функция, формируются необходимые ограничения и разрабатывается алгоритм поиска оптимального решения.

## 2. Выбор вида и структуры математической модели

Для решения этой задачи рассмотрим ключевые особенности неформального описания предметной области [1-3].

Теория производства-потребления оперирует элементами качества жизни потребителя, «переносимыми» продукцией, и определяет вид оптимального решения её разработчика и изготовителя в виде вектора  $X=\{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , компоненты которого принимают значения 0 или 1. Каждый компонент решения устанавливает факт *включения* ( $x_i=1$ ) или *игнорирования* ( $x_i=0$ ) конкретного элемента качества жизни потребителя в конечный набор элементов, определенный в работе [7] как профиль качества продукции. Математическая интерпретация семантической теории должна отображать *два варианта решения по каждому его компоненту*.

Другой характерной особенностью теории производства-потребления является вид описываемого ею процесса – процесса *направленного преобразования* множества потенциальных потребителей продукции в несколько непересекающихся множеств.

Количество указанных множеств зависит от принятого числа критериев, влияющих на выбор потребителем того или иного варианта продукции, определенной как дифференцированная продукция [3]. Таких критериев в настоящей работе принято два: качество жизни потребителя, достигаемое потреблением продукции, и стоимость приобретения последней. Следовательно, непересекающимися множествами будут:

- ◆ множество потребителей, удовлетворенных профилем качества и стоимостью продукции с определенным набором элементов качества жизни потребителя;
- ◆ множество потребителей, предпочитающих другой профиль качества продукции, несмотря на доступную стоимость (с поправкой на прибыль производителя и наценку предприятия, реализующего товар на рынке, под стоимостью здесь и далее будем понимать цену товарной продукции – затраты потребителя на её приобретение);
- ◆ множество потребителей, считающих профиль качества продукции соответствующим их запросам, но отказывающихся от её потребления по причине высокой стоимости;

◆ гипотетическое четвертое множество – множество потребителей, которые оценивают профиль качества продукции неудовлетворительным, а стоимость его приобретения – недостижимой, далее принимаем пустым (сокращение набора необходимых потребителю элементов качества жизни приводит к снижению его стоимости, а не к её росту) и в решении поставленных задач далее не учитываем.

В работе [6] предложена адекватная графическая интерпретация указанного направленного преобразования с помощью эквивалентной схемы, позволяющей оценить рыночную востребованность различных профилей качества продукции [7].

Рассмотренные особенности теории производства-потребления, а также показанные в перечисленных работах её практические приложения, делают целесообразным и возможным для решения поставленной оптимизационной задачи применение элементов теории графов. Введение адекватной графовой модели опирается на следующие высказывания.

Отмеченная направленность процесса преобразования множества потребителей обуславливает применение модели вида *ориентированного графа*.

Процессу преобразования множества потребителей поставим в соответствие абстрактное понятие *потока*, протекающего по узлам и ребрам графа, – понятия, используемого, в частности в работе [8]. Потоком в графе  $N(V, A)$  принято считать целочисленную функцию  $\varphi$ , определенную на множестве дуг  $A$ , а целое число  $\varphi(a)$  – потоком по дуге  $a \in A$ . Вершины  $V$  различаются по характеру их воздействия на поток  $\varphi$ . Применяемыми в теории графов видами воздействия вершин на поток являются: создание, поглощение и сохранение потока. Соответствующие этим воздействиям вершины называют источниками, стоками и внутренними (промежуточными) вершинами. Указанные понятия и виды воздействий, как показано ниже, не составляют теоретическую платформу, достаточную для решения поставленной задачи оптимизации, однако могут послужить основой для требуемой конкретизации видов воздействий вершин на поток и видов вершин.

Векторная форма области существования возможных решений с конечным числом  $n$  бинарных компонентов определяет цепочечную структуру *конечного графа с  $n$  звеньями*.

Приведенные положения позволяют конкретизировать вид математической модели продукции (математической абстракции теории производства-потребления) как *конечный плоский цепочечный орграф с потоками*. Возможные варианты путей потоков, соединяющих внешние вершины графа, определяют множество допустимых решений. На *рис. 1* представлен простой пример орграфа (для случая числа компонентов вектора решения  $n = 5$ ), служащий для демонстрации свойств и возможностей «полных» моделей.

Предложенная модель позволяет решить следующие актуальные задачи, в том числе указанные в [8]:

Задача максимизации потока между двумя заданными вершинами при условии, что поток источника конечен.

Задача нахождения потока минимального качества, при котором будет обеспечен сток на одной из вершин не менее заданной величины, при заданной величине потока источника.

Задача определения потоков максимальной стоимости на одной из вершин при заданных потоке источника и стоимости единицы потока.

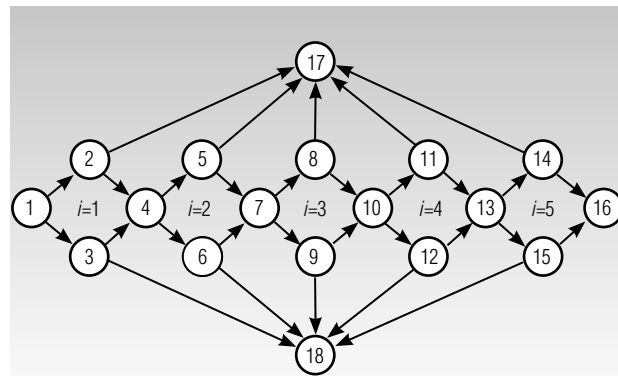


Рис. 1. Модель теории производства-потребления – конечный плоский (двумерный) орграф с потоками (для случая числа компонентов вектора решения  $n=5$ )

С целью формирования алгоритмов решений перечисленных задач оптимизации на основе введенного конечного плоского орграфа с потоками необходимо описать его компоненты и сформулировать для него правила вершин и дуг.

### 3. Определение свойств и характеристик компонентов модели

Эту задачу целесообразно решить путем разбиения дуг и вершин графа на множества, характери-

зующиеся определенным структурным типом. Ряд важнейших практических задач состоит в разбиении дуг (ребер) и вершин графа на наименьшие числа соответственно дуг и вершин [8].

### 3.1. Разбиение дуг

Задачей этого процесса является определение минимальных рёберных разбиений, покрывающих ориентированный граф. Известен алгоритм разбиения дуг в графах без потоков [8], однако его применение в данном случае даёт неверное решение.

Последнее обстоятельство обусловлено тем, что в известном алгоритме рёберных разделений не учтены особенности ряда дуг предложенной графовой модели. Особенности состоят в том, что не все дуги орграфа (рис. 1), положительно или отрицательно инцидентных одной вершине, представляют независимые варианты путей движения потока. Указанные дуги определим как альтернативные. К ним относятся все дуги широко распространенных сетевых моделей, и на «альтернативном» понимании дуг основаны такие методы моделирования, как метод критического пути, ПЕРТ и другие. Такими дугами в приведенном примере являются, в частности, пара дуг  $a_{1,2} \cong (1,2)$  и  $a_{1,3} \cong (1,3)$ . В графах с потоками часть дуг не представляет альтернативных направлений и, следовательно, не увеличивает количества возможных путей движения потока по графу. К подобным дугам на орграфе (рис. 1) относятся, в частности, пара дуг  $a_{2,4} \cong (2,4)$  и  $a_{2,17} \cong (2,17)$ . Для них невозможным является выбор пути либо по дуге  $a_{2,4}$ , либо по дуге  $a_{2,17}$  – путь по ним будет хотя и разветвленный, но один. Таким образом, несколько «неальтернативных» дуг (назовем их блокированными дугами) по числу вариантов путей эквивалентны одной традиционной дуге. Тогда расчет числа  $r$  минимальных разбиений дуг орграфа должен выполняться по следующим выражениям

$$r = k - \sum_{v \in C} (M_v - 1) \delta^-(v) \quad (1)$$

$$k = \sum_{v \in A} [\delta^+(v) - \delta^-(v)] = \sum_{v \in B} [\delta^-(v) - \delta^+(v)] \quad (2)$$

Здесь  $k$  – количество разбиений без учета блокировки дуг [8],  $\delta^+(v)$  и  $\delta^-(v)$  – количества дуг, соответственно положительно и отрицательно инцидентных вершине  $v$ ;  $A$  и  $B$  – множества вершин орграфа, таких что

$$A = \{v \in V | \delta^+(v) > \delta^-(v)\}, \quad (3)$$

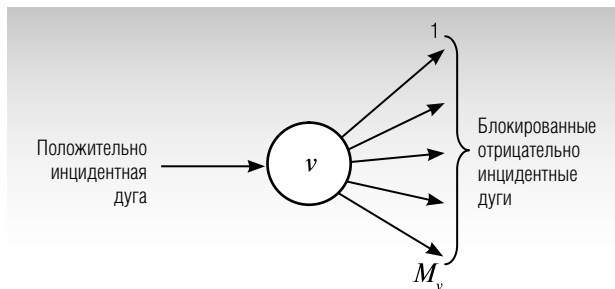


Рис. 2. Блокированные дуги  $\{1, \dots, M_v\}$  вершины  $v$  орграфа с потоками

$$B = \{v \in V | \delta^+(v) < \delta^-(v)\}, \quad (4)$$

множество  $C \subseteq B$  – множество вершин, имеющих отрицательно инцидентных вершине  $v \in D$  блокированные дуги  $a_1, \dots, a_{M_v}$ ;  $M_v$  – количество инцидентных вершине  $v$  блокированных дуг. Второе слагаемое в выражении (1) учитывает сокращение вариантов путей потоков в орграфе с потоками по сравнению с сетевыми моделями. Потоки всех блокированных дуг вершины  $v$  представляют поток положительно инцидентной ей дуги, расщепленный на части (рис. 2).

Расчет минимального числа разбиений дуг, выполненный по выражениям (1-4) для примера, приведенного на рис. 1, дает следующие результаты: множества вершин:

$$A = \{16, 17, 18\}, B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15\}, \\ C = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15\};$$

количество блокированных дуг для каждой вершины  $M_v = 2, v \in C$ ; количество дуг, отрицательно инцидентных вершинам  $v - \delta^-(v, v \in C) = 10$ ; количество разбиений без учета блокировки дуг  $k = 12$ , количество разбиений с учетом блокировки дуг  $r = 2$ . На рис. 3 приведено собственно минимальное

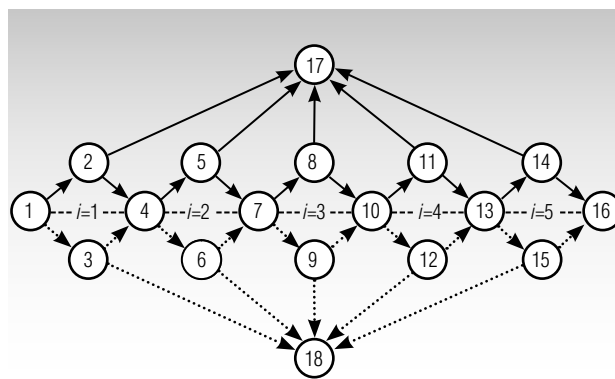


Рис. 3. Минимальное разбиение дуг орграфа с потоками, приведенного на рис. 1

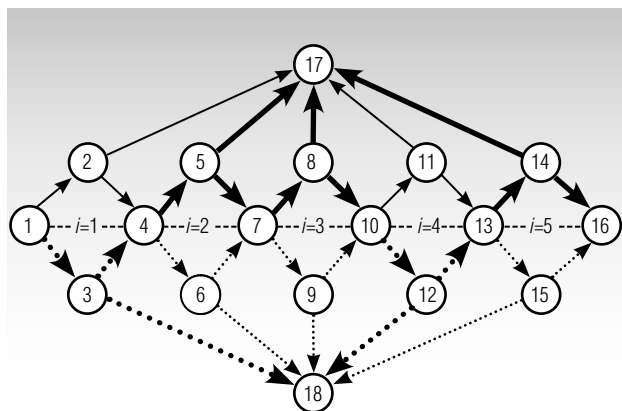


Рис. 4. Вариант путей потоков орграфа (рис. 1), соответствующий решению  $X' = \{0, 1, 1, 0, 1\}$

разбиение дуг. Штриховая линия (назовем ее *экватор графа*) делит плоскость графа на две полуплоскости: верхняя соответствует компонентам  $x_i = 1$ , нижняя –  $x_i = 0$ .

Проведенное минимальное разбиение дуг орграфа с потоками дает наглядное представление о характере решений, принимаемых ЛПР в производстве продукции. Эти решения («включать» –  $x_i = 1$  или «не включать» –  $x_i = 0$  компонент качества жизни потребителя в профиль продукции) будут формировать траекторию движения потока по орграфу. Один из вариантов решений по выбору профиля качества продукции, вектор  $X'$  которого имеет компоненты  $X' = \{0, 1, 1, 0, 1\}$ , выделен на рис. 4 жирными дугами.

### 3.2. Разбиение вершин

Ряд задач оптимизации, решаемых на основе графовых моделей, связан с разбиением вершин графа на наименьшее количество множеств независимых вершин – множеств, не содержащих смежных вершин (задачи раскраски графа). В таких задачах указанное наименьшее количество независимых

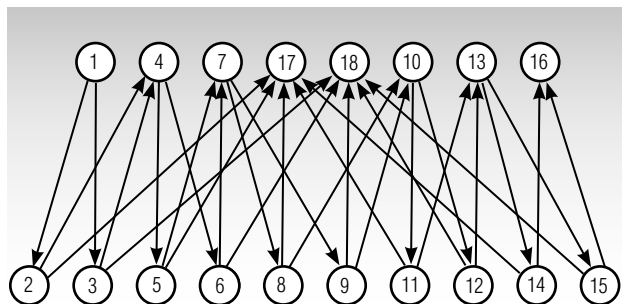


Рис. 5. Иллюстрация свойства двудольности орграфа с потоками

множеств называют хроматическим числом графа. Нетрудно убедиться, что хроматическое число введенного орграфа равно двум, а сам орграф является двудольным (рис. 5).

Приведенные варианты представления введенного орграфа позволяют выделить группы вершин с характерными структурными свойствами и сформулировать правила вершин для каждой из этих групп. Вершины классифицируются по их воздействию на поток. Для поставленной задачи поиска оптимальных решений на основе введенной графовой модели эти воздействия связаны с компонентами решений  $x_i, i = \overline{1, n}$ , следовательно, правила вершин должны содержать значения  $x_i$  как независимые параметры.

#### 3.2.1. Внутренние вершины

##### а) Вершины с альтернативными потоками (alternative flows)

Обозначим такие вершины вершинами *A*-типа. К ним на примере рис. 1 относятся вершины 4, 7, 10, 13. Фрагмент плоского орграфа, содержащий вершину *A*-типа и инцидентные ей дуги и показанный на рис. 6, разделен вертикальной и горизонтальной штриховыми линиями на две соответствующие пары полуплоскостей. Левая по-

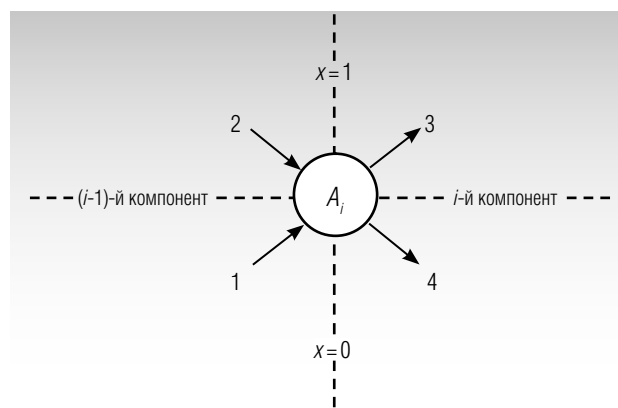


Рис. 6. Вершина *A*-типа с инцидентными ей дугами 1-4

Таблица 1.

#### Правила (логика) *A*-вершины

Компоненты решения		Потоки в дугах			
$x_{i-1}$	$x_i$	1	2	3	4
0	0	$\varphi(1)$	0	0	$\varphi(1)$
0	1	$\varphi(1)$	0	$\varphi(1)$	0
1	0	0	$\varphi(2)$	0	$\varphi(2)$
1	1	0	$\varphi(2)$	$\varphi(2)$	0

луплоскость соответствует  $(i-1)$ -ому компоненту вектора решения, правая –  $i$ -ому. Верхняя полуплоскость фрагмента графа соответствует значению  $x_i=1$ , нижняя –  $x_i=0$ .

Правила вершин  $A$ -типа (связь входящих и исходящих потоков) сформулируем в виде *табл. 1*. Потоки  $\varphi(1)$  и  $\varphi(2)$  в дугах 1 и 2 не зависят от состояния вершины  $A_i$ . Потоки  $\varphi(3)$  и  $\varphi(4)$  в дугах 3 и 4 зависят как от потоков  $\varphi(1)$  и  $\varphi(2)$ , т.е. от значения  $x_{i-1}$ , так и от состояния вершины  $A_i$  (т.е. от значения  $x_i$ ).

**б) Вершины, разветвляющие (делящие) входные потоки**

Обозначим такие вершины вершинами  $D$ -типа (*Dividing*). Вершина  $D$ -типа с инцидентными ей дугами показана на *рис. 7*, здесь дуги 2 и 3 являются заблокированными.

К этому типу вершин в примере *рис. 1* относятся вершины 2,3,5,6,8,9,11,12,14,15. Правила вершин для вершины  $D$ -типа  $i$ -го компонента решения представлены в *табл. 2*. Вершина  $D_i$  разделяет проходящий через нее поток  $\varphi$  на два потока: поток  $p_i\varphi$  одной отрицательно инцидентной дуги и поток  $(1-p_i)\varphi$  второй отрицательно инцидентной дуге. Величину  $p_i$  можно трактовать как *вес дуги 2*, а величину  $(1-p_i)$  – как *вес дуги 3* (*рис. 7*).

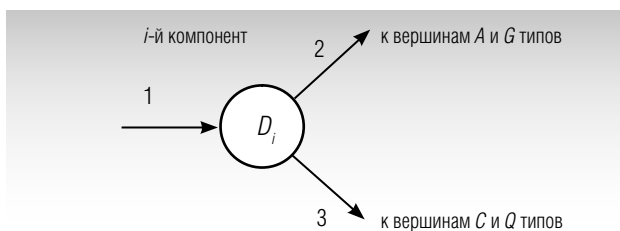


Рис. 7. Вершина  $D$ -типа  $i$ -го компонента модели с инцидентными дугами 1-3

Таблица 2.

**Правила  $D$ -вершины**

Коэффициент передачи потока	Потоки в дугах		
	1	2	3
$p_i$	$\varphi(1)$	$p_i\varphi(1)$	$(1-p_i)\varphi(1)$

**3.2.2. Внешние вершины**

**а) Вершина без входящих потоков – исток (source).**

Обозначим такие вершины вершинами  $S$ -типа. К этому типу вершин в примере *рис. 1* относится вершина 1. Для вершин без входных потоков будем указывать величину исходящего потока как *мощ-*

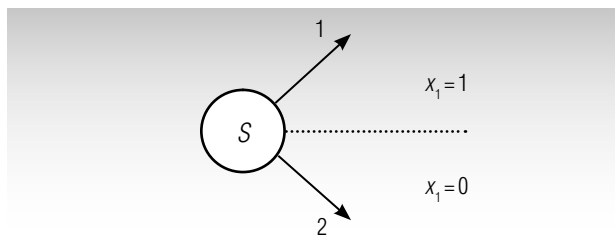


Рис. 8. Вершина  $S$ -типа ( $i=1$ )

Таблица 3.

**Правила  $S$ -вершины**

Мощность вершины $S$	Компонент решения $x_i$	Потоки в альтернативных дугах	
		1	2
$\varphi(S)$	0	0	$\varphi(S)$
	1	$\varphi(S)$	0

ность вершины  $\varphi(S)$ . Вершина  $S$ -типа показана на *рис. 8*, где отрицательно инцидентные ей альтернативные дуги 1 и 2 соответствуют двум вариантам решения, соответственно  $x_1=1$  и  $x_1=0$ . Правила вершин для неё приведены в *табл. 3*.

**б) Вершины без исходящих потоков**

Вершина с альтернативными входными потоками – сток (*Gutter*). Обозначим такие вершины вершинами  $G$ -типа. К ним на примере *рис. 1* относится вершина 16. Вершина  $G$ -типа показана на *рис. 9*, где инцидентные ей дуги 1 и 2 соответствуют двум вариантам  $n$ -го компонента решения, соответственно  $x_n=1$  и  $x_n=0$ . Правила вершин для неё приведены в *табл. 4*. Отметим очевидный факт, что эта вершина не оказывает воздействие на потоки в дугах 1 и 2, и наоборот, потоки в дугах 1 и 2, а также компонента решения  $x_n$  определяют её мощность  $\varphi(G)$ .

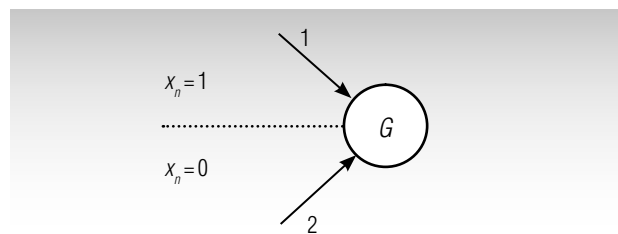


Рис. 9. Вершина  $G$ -типа с инцидентными дугами 1 и 2

Таблица 4.

**Правила  $G$ -вершины**

Компонент решения $x_n$	Потоки в альтернативных дугах		Мощность вершины $G$ $\varphi(G)$
	1	2	
1	$\varphi(1)$	0	$\varphi(1)$
0	0	$\varphi(2)$	$\varphi(2)$

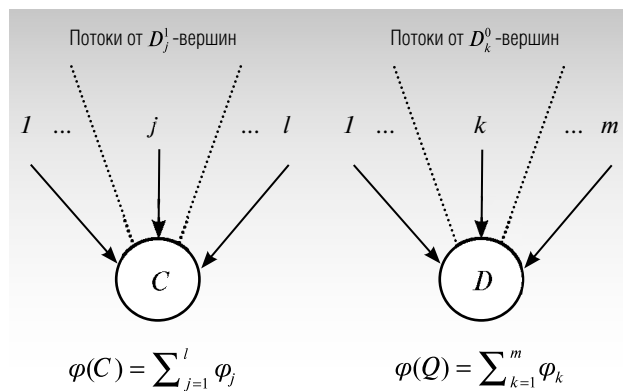


Рис. 10. Вершины C и Q-типов с положительно инцидентными дугами и соответствующие правила вершин:  $x_j = 1, j=1, \dots, l; x_k = 0, k=1, \dots, m; l+m=n$

Вершины с объединяемыми входными потоками. Такие потоки будут определяться либо компонентами  $x_i = 1$ , либо компонентами  $x_i = 0$ . Обозначим вершины, соответствующие  $x_i = 1$ , C-вершинами и вершины, соответствующие  $x_i = 0$  вершинами Q-типа. На примере рис. 1 вершиной C является внешняя вершина 17, а вершиной Q – вершина 18. Вершины C- и Q-типов и соответствующие им правила показаны на рис. 10.

Вершина C-типа суммирует потоки дуг, отрицательно инцидентных вершинам  $D^j_1$  - D-вершинам с ненулевой мощностью, находящимся в верхней полуплоскости орграфа (на примере рис. 1 такими вершинами являются вершины 2,5,8,11,14). Вершина Q-типа суммирует потоки дуг, отрицательно инцидентных вершинам  $D^j_0$  - D-вершинам с ненулевой мощностью, находящимся в нижней полуплоскости орграфа (на примере рис. 1 такими вершинами являются вершины 3,6,9,12,15). Орграф, представленный на рис. 1 с учетом обозначений вершин введенных структурных типов, принимает

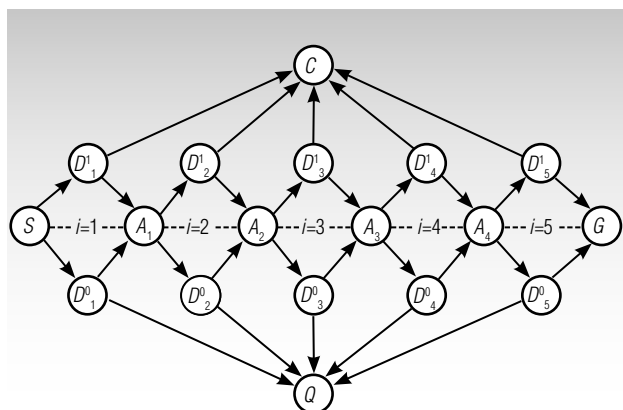


Рис. 11. Орграф с размеченными типами вершин

вид (рис. 11). Правила вершин, размеченных здесь, приведены в табл. 1-4 и на рис. 10.

#### 4. Целевые функции и ограничения

Модель (рис. 11), приведенные правила для её вершин (табл. 1-4, рис. 10) и представление её ориентированных реберных покрытий (рис. 3) позволяют сформулировать целевые функции и ограничения для различных практических приложений.

##### 4.1. Задача максимального потока, идущего к вершине G

Решается прикладная задача формирования профиля качества продукции с максимальной долей рынка потребителей (максимальным количеством потребителей при фиксированном объеме рынка  $P$ ) – потребителей, удовлетворенных её качеством и ценой. В отличие от традиционного целочисленного понимания потока, потоком будем считать любое неотрицательное вещественное число, означающего часть целого, количество людей, стоимость (цену) продукции и др. В первом варианте данной задачи поток в компонентах графа – доля потока потребителей, идущего от вершины S к внешним вершинам и принятого за единицу, т.е.  $0 \leq \varphi_i \leq 1, i = 1, n$ .

Воспользуемся логикой постановки и решения одной из задач дискретного программирования – задачи о назначениях. Расширим введенное ранее понятие профиля качества продукции. Будем считать, что в профиль качества продукции назначаются  $i$ -тые элементы двух видов: собственно элемент качества (индекс  $j=1$ ) и «отсутствие» такового ( $j=2$ ). Введем соответствующие переменные  $x_{ij}$  и  $p_{ij}$ :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в профиль назначен } ij\text{-ый элемент} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad (5)$$

$p_{ij}$  – коэффициент передачи потока  $i$ -той D-вершиной для  $ij$ -го элемента решения,  $0 \leq p_{ij} \leq 1, j=1, 2; i = 1, n$ .

Математическая модель задачи формирования профиля качества продукции, привлекательной и доступной для максимальной доли рынка потребителей  $C(X)$  имеет следующий вид:

$$C(X) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_{ij} \rightarrow \max; \quad (6)$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^2 x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (7)$$

Здесь вектор  $X = \{x_{ij}\}$  – вектор решений производителя по профилю качества продукции, величина  $p_{i1}$  – доля потребителей, не учитывающих при оценке привлекательности продукции наличие  $i$ -го элемента в профиле её качества, величина  $p_{i2}$  – доля потребителей, считающих доступным приобретение продукции с  $i$ -тым элементом качества.

Вариант рассматриваемой задачи о максимальном количестве потребителей  $P^+$  дополняется выражением:

$$P^+ = PC(X) = \varphi(S) C(X). \quad (8)$$

Здесь мощность истока графовой модели  $\varphi(S)$  имеет смысл количества  $P$  потенциальных потребителей данной продукции.

Выражения (5) и (6) показывают, что данная задача относится к классу задач нелинейного целочисленного программирования. Наиболее распространенным способом их решения является метод «ветвей и границ».

#### 4.2. Задача максимальной стоимости потока, идущего к вершине $G$

Решается прикладная задача формирования профиля качества продукции, при котором достигается максимальный доход производителя. Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$C(X) = P^+ [C_0 + \prod_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_{ij}] \rightarrow \max, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^2 x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (10)$$

Здесь  $C_0$  – цена базовой комплектации продукции (постоянная составляющая цены, не зависящая от элементов качества),  $c_i$  – цена  $i$ -го элемента.

#### 4.3. Задача минимизации потока к вершине $G$ до заданного порога при нулевом потоке к вершине $C$

Решается однокритериальная задача формирования минимального профиля качества продукции с заданным уровнем предпочтения (с долей рынка

потребителей, не удовлетворенных качеством продукции, не более  $\varphi_0(Q)$ ). Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$C(X) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$p_{i1} = 1, \sum_{j=1}^2 x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (12)$$

при ограничении

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_{ij} \geq 1 - \varphi_0(Q). \quad (13)$$

#### 4.4. Задача минимизации потока к вершине $G$ до заданного порога при нулевом потоке к вершине $Q$

Решается однокритериальная задача формирования минимального профиля качества продукции, соответствующего доле её потребителей, не удовлетворенных стоимостью продукции, не более  $\varphi_0(C)$ . Симметрия графа относительно его экватора позволяет использовать в качестве целевой функции выражение (11), в котором величины  $p_{i2}$  и  $x_{ij}$  удовлетворяют условию:

$$p_{i2} = 1, \sum_{j=1}^2 x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (14)$$

Задача решается при следующем ограничении:

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_{ij} \geq 1 - \varphi_0(C). \quad (15)$$

### 5. Выводы

Обоснована математическая модель семантической теории производства-потребления продукции в открытых социально-экономических системах – плоский орграф с потоками.

Предложена методика расчета минимального реберного разбиения, учитывающая особенности формирования вариантов путей в орграфе с потоками по сравнению с традиционным разбиением ребер в сетевых моделях.

Дана классификация вершин орграфа и сформулированы их правила, положенные в основу расчетов потоков модели во внешние вершины различных видов.

Сформулированы целевые функции и ограничения, необходимые и достаточные для поиска решений, оптимальных по ряду критериев.



Прикладные задачи расчета характеристик социально-экономических систем относятся к классу задач нелинейного целочисленного программирования (целевая функция нелинейная, ограничения на решения – линейные/нелинейные).

Введенная математическая модель может при необходимости быть развита на область задач с количеством факторов, определяющих целевую функцию, более двух. При этом граф будет не плоским, а  $M$ -мерным ( $M$  – число факторов). ■

#### Литература

1. Ивлев М.А. Инвариантные аспекты производственных систем в задаче адаптивного управления // Организатор производства. – 2009. – №4. – С. 84-89.
2. Ивлев М.А. Открытые производственные системы // Перспективы науки. – 2010. – №2 (04). – С. 120-124.
3. Ивлев М.А. Парадигма производства-потребления дифференцированной продукции // Перспективы науки. – 2010. – №5 (07). – С. 109-113.
4. Перспективное планирование качества продукции и план управления. APQP. Ссылочное руководство / Пер. с англ. – Н.Новгород: ООО СМЦ «Приоритет», 2010.
5. Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.Н.Волковой, В.Н.Козлова. – М.: Высшая школа, 2004.
6. Ивлев М.А. Бинарные цепочечные структуры как модели дифференцированной продукции // Бизнес-информатика. – 2010. – № 4 (14). – С. 21-28.
7. Ивлев М.А. Расчет концептуальных параметров открытых производственных систем на основе бинарных моделей // Организатор производства. – 2010. – № 3. – С. 9-14.
8. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1973.

