ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПРИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЕМКОСТЕЙ ПЕРЕГОННЫХ ПУТЕЙ[1]

Н.К. Хачатрян,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Центрального экономико-математического института Российской академии наук, старший преподаватель кафедры бизнес-аналитики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

E-mail: nerses@cemi.rssi.ru
Адрес: г. Москва, Нахимовский проспект, 47

В работе [1] была исследована модель, описывающая процесс организации грузоперевозок с заданной системой контроля. Изучены возможные режимы грузоперевозок, исследован вопрос устойчивости таких режимов, описана область их устойчивости. В данной работе изучается модифицированная модель при дополнительных ресурсных ограничениях.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, стационарный режим грузоперевозок, устойчивость.

1. Введение

Транспорту принадлежит особая роль в экономике страны, он связывает воедино все отрасли экономики, обеспечивая перемещение сырья, полуфабрикатов и готовой продукции. Транспортной системе присуще черты, свойственные любой другой производственной системе. Однако по сравнению с остальными отраслями транспорт обладает целым рядом специфических особенностей, порождаемых характером производственного процесса. В процессе своего функционирования транспортная система не создает нового материального продукта, ее продукцией является сам процесс перемещения грузов и пассажиров. В отличие от продукции других отраслей транспортная продукция не взаимозаменяема: перевыполнение плана перевозок какого-либо груза между одними пунктами не может скомпенсировать невыполнение перевозок того же груза между другими пунктами. Эта продукция не существует отдельно от транспорта и не может производиться в запас, т.е. невыполнение перевозок в один период времени не может быть скомпенсировано перевыполнением их в другой период времени. Масштабы деятельности отрасли, рассредоточенность ее объектов, динамический характер производственного процесса обуславливают чрезвычайную сложность управления транспортной системой.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00768)

Среди проблем, связанных с работой транспорта, центральное место занимают задачи планирования и организации грузоперевозок. Впервые методы нахождения оптимального плана перевозок в нашей стране были предложены в 30-ых годах прошлого столетия. В 1939 г. Л.В. Канторовичем [2] математически описана транспортная задача линейного программирования. Им же определен целый класс задач, близких к транспортной, предложен алгоритм для решения транспортной задачи, названный методом разрешающих множителей. В 1949 г. Л.В. Канторович и М.К. Гавурин опубликовали работу [3], в которой решалась транспортная задача с ограничениями на пропускные способности. Используя идеи общего метода Л.В.Канторовича, для решения задач линейного программирования был разработан метод потенциалов. Через год этот же метод был предложен американским математиком Дж. Данцигом [4]. В 1985 г. О.И. Авен, С.Е. Ловецкий и Г.Е. Моисеенко опубликовали работу [5], посвященную проблемам оптимального планирования и управления транспортными потоками на транспортных сетях. Были рассмотрены математические модели транспортных сетей и транспортных потоков. Другой важной задачей, связанной с работой транспорта, является организация грузоперевозок и их системы контроля. Такая задача рассмотрена в работах [6 – 8].

В работе [1] была построена и исследована модель организации грузоперевозок на протяженном участке пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Приведем основные положения указанной модели. Предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегонный путь, где временно может храниться часть грузов. Движение грузов происходит в одном направлении. На произвольную промежуточную станцию с номером i груз может поступать как с предыдущей станции с номером $(i - 1)$ так и перегонного пути, расположенного между ними. Аналогично, с произвольной промежуточной станции с номером i груз может быть отправлен либо на следующую станцию с номером $(i + 1)$ либо на перегонный путь, расположенный между ними.

Обработка грузов происходит в узлах станций. Очевидно, что количество задействованных узлов обработки грузов при бесперебойной работе всей цепи перевозок ограничено. Максимальное количество таких узлов, обозначаемое через Δ, определяет пропускную способность станций.

Рассматривались четыре варианта модели. Первый вариант модели описывает транснациональные грузоперевозки и поэтому предполагалось, что число промежуточных станций бесконечно как в левую, так и в правую стороны. Во втором варианте модели рассматривался грузопоток, идущий от узловой станции, и поэтому предполагалось, что число промежуточных станций бесконечно лишь в правую сторону. Третий вариант модели описывал грузопоток между двумя узловыми станциями. Наконец, четвертый вариант модели описывал транспортные грузоперевозки по круговой цепочке станций. Для первых трех вариантов модели приводились постановка задачи и основные результаты. Детальное описание этих вариантов модели можно найти в работах [9 – 11]. Для четвертого варианта модели изучены возможные режимы организации грузоперевозок, проведено исследование на устойчивость стационарного режима грузоперевозок.

Недостатком этой модели является предположение о неограниченности емкостей перегонных путей. Данная работа посвящена исследованию четвертого варианта указанной модели в случае, когда емкости перегонных путей ограничены.

2. Формальное описание исходной модели и основные результаты

Организация подобных грузопотоков зависит от технологий по приему, обработке и отправлению грузов. Опишем эти технологии.

Первая технология основана на установленных нормативных правилах взаимодействия соседних станций. Для каждой промежуточной станции с номером i существуют правила взаимодействия с предыдущей $(i-1)$-ой станцией и последующей $(i+1)$-ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, станция с номером i, в зависимости от количества задействованных узлов на $(i - 1)$-ой станции, должна увеличивать или уменьшать количество задействованных узлов со скоростью $\alpha(z_{i-1} - z_i)$ (т.е. принимать груз с предыдущей станции если количество задействованных узлов на $(i - 1)$-ой станции больше чем на i-ой станции, или отправлять на перегонный путь если количество задействованных узлов на $(i - 1)$-ой станции меньше чем на i-ой станции). Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, станция с номером i, в зависимости от количества задействованных узлов на $(i + 1)$-ой станции, должна уменьшать или увеличивать количество задействованных узлов со скоростью $\alpha(z_i - z_{i+1})$ (т.е. отправлять на следующую станцию если число задействованных узлов на i-ой станции больше чем на $(i+1)$-ой станции, или принимать с перегонного пути если число задействованных узлов на i-ой станции меньше чем на $(i+1)$-ой станции). Первая технология не учитывает условия ограниченности пропускной способности станций. Кроме того, она не позволяет использовать весь потенциал станций. В связи с этим, наряду с первой технологией, используется и вторая технология. Она позволяет, как увеличить число задействованных узлов (если оно не превышает Δ) так и уменьшать (если оно превышает Δ). При этом груз принимается с перегонного пути либо отправляется на перегонный путь. Из определения второй технологии следует, что функция $\varphi(.)$, задающая скорость изменения числа задействованных узлов обработки в рамках данной технологии, обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, 0]$ тождественно равна 0, на интервале $(0, x_{opt})$ является возрастающей, в точке x_{opt} принимает максимальное значение, на полупрямой $(x_{opt}, +\infty)$ является убывающей, в точке Δ принимает нулевое значение, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейной.

Приведем описание четвертого варианта модели (исследование грузопотока по круговой цепочке станций) и основной результат данного исследования. Этот вариант модели описывается следующей системой

$$\dot{x}_1(t) = \alpha(x_n - x_1) - \alpha(x_1 - x_2) + \varphi(x_1),\ t \in [0, +\infty), \qquad (1)$$

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(x_{i-1} - x_i) - \alpha(x_i - x_{i+1}) + \varphi(x_i),$$
$$i = 2, \ldots, n-1,\quad t \in [0, +\infty), \qquad (2)$$

$$\dot{x}_n(t) = \alpha(x_{n-1} - x_n) - \alpha(x_n - x_1) + \varphi(x_n),\ t \in [0, +\infty), \qquad (3)$$

$$x_i(t) = x_{i+1}(t+\tau),\ i = 1, \ldots, n-1,\ t \in [0, +\infty) \qquad (4)$$

$$x_n(t) = x_1(t+\tau),\quad t \in [0, +\infty). \qquad (5)$$

Здесь $x_i(t)$ – число задействованных узлов на i-ой станции в момент времени t. Дифференциальные уравнения (1)-(3) определяют интенсивность движения грузопотока по круговой цепочке, состоящей из n станций, а соотношения (4) и (5) задают систему контроля. Она заключается в том, что объемы обрабатываемых грузов для любого планового интервала времени на всех станциях должны совпадать с определенным лагом времени, единым для всех станций. Константу τ, которая является сдвигом между моментами замеров и сравнения объемов грузов, будем называть характеристикой системы контроля. Решения системы дифференциальных уравнений (1)-(3), удовлетворяющие условиям (4)-(5), называются решениями типа бегущей волны. В работе [1] было показано, что система (1)-(3) с положительными координатами начального значения имеет единственное решение типа бегущей волны (удовлетворяющее условиям (4)-(5)), а именно, стационарное решение $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$. Кроме того, всякое решение системы (1)-(3) с положительными координатами начального значения сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$.

3. Модификация модели

Проведем нумерацию перегонных путей. Перегонный путь, расположенный между станциями с номерами i и $i+1$ обозначим номером i. Количество задействованных узлов на i-ом перегонном пути в момент времени t обозначим через $y_i(t)$. Предположим, что количество узлов на всех перегонных путях одинаково и равно V. Напомним, что в исходной модели емкости перегонных путей считались неограниченными, т.е. число задействованных узлов на них могло быть произвольным.

При такой модификации модели изменятся уравнения (1)-(3), описывающие интенсивность движения грузопотока на станциях. Кроме того появятся дополнительные уравнения, описывающие интенсивность движения грузопотока на перегонных путях, решения которых должны удовлетворять условию ограниченности емкостей перегонных путей. Начнем с пересмотра уравнения (2). Для того чтобы переписать уравнения (2) заметим следующее.

Первое слагаемое в правой части уравнения (2) описывает взаимодействие i-ой станции с $(i-1)$-ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, если $x_{i-1} > x_i$, то грузопоток поступает с предыдущей станции, если же $x_{i-1} < x_i$ то грузопоток отправляется на перегонный путь, расположенный между i-ой и $(i+1)$-ой станциями (данный перегонный путь мы обозначили номером i). С учетом ограниченности емкостей перегонных путей, первое слагаемое в правой части уравнения (2) примет вид:

$$\alpha(x_{i-1} - x_i)sign(x_{i-1} - x_i) +$$
$$+\alpha(x_{i-1} - x_i)sign(x_i - x_{i-1})sign(V - y_i). \qquad (6)$$

Функция $sign$, участвующая в выражении (6) определяется следующим образом:

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (2) описывает взаимодействие i-ой станции с $(i+1)$-ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, если $x_i > x_{i+1}$, то грузопоток отправляется на следующую станцию, если же $x_i < x_{i+1}$, то грузопоток поступает с перегонного пути, расположенного между $(i-1)$-ой и i-ой станциями (данный перегонный путь мы обозначили номером $(i-1)$). С учетом ограниченности емкостей перегонных путей, второе слагаемое в правой части уравнения (2) примет вид:

$$\alpha(x_i - x_{i+1}) sign(x_i - x_{i+1}) + \\ + \alpha(x_i - x_{i+1}) sign(x_{i+1} - x_i) sign(y_{i-1}). \qquad (7)$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (2) представляет собой интенсивность движения грузопотока в рамках второй технологии и описывает взаимодействие i-ой станции с соседними перегонными путями (с номерами $(i-1)$ и i). Напомним, что в рамках второй технологии, станция с номером i принимает грузопоток с $(i-1)$-ого перегонного пути с интенсивностью $\varphi(x_n)$ если $x_n < \Delta$ и отправляет на i-ый перегонный путь с интенсивностью $\varphi(x_n)$ если $x_n > \Delta$. С учетом ограниченности емкостей перегонных путей, третье слагаемое в правой части уравнения (2) примет вид:

$$\varphi(x_i) sign(\Delta - x_i) sign(y_{i-1}) + \\ + \varphi(x_i) sign(x_i - \Delta) sign(V - y_i). \qquad (8)$$

Таким образом, согласно выражениям (6), (7) и (8) уравнение (2) преобразуется в следующее уравнение

$$\dot{x}_i = \alpha(x_{i-1} - x_i) sign(x_{i-1} - x_i) + \\ + \alpha(x_{i-1} - x_i) sign(x_i - x_{i-1}) sign(V - y_i) - \\ -[\alpha(x_i - x_{i+1}) sign(x_i - x_{i+1}) + \\ + \alpha(x_i - x_{i+1}) sign(x_{i+1} - x_i) sign(y_{i-1})] + \\ +\varphi(x_i) sign(\Delta - x_i) sign(y_{i-1}) + \\ + \varphi(x_i) sign(x_i - \Delta) sign(V - y_i), \\ i = 2, ..., n-1, t \in [0, +\infty)$$

Аналогичным образом преобразуются и уравнения описывающие интенсивность движения грузопотока на станциях с номерами 1 и n. Необходимо лишь учесть, что для станции с номером 1 предыдущей будет станция с номером n и, соответственно, для станции с номером n последующей будет станция с номером 1. Итак, дифференциальные уравнения (1) и (3) преобразуются следующим образом

$$\dot{x}_1 = \alpha(x_n - x_1) sign(x_n - x_1) + \\ + \alpha(x_n - x_1) sign(x_1 - x_n) sign(V - y_1) - \\ -[\alpha(x_1 - x_2) sign(x_1 - x_2) + \\ + \alpha(x_1 - x_2) sign(x_2 - x_1) sign(y_n)] + \\ +\varphi(x_1) sign(\Delta - x_1) sign(y_n) + \\ + \varphi(x_1) sign(x_1 - \Delta) sign(V - y_1), \quad t \in [0, +\infty);$$

$$\dot{x}_n = \alpha(x_{n-1} - x_n) sign(x_{n-1} - x_n) + \\ + \alpha(x_{n-1} - x_n) sign(x_n - x_{n-1}) sign(V - y_n) - \\ -[\alpha(x_n - x_1) sign(x_n - x_1) + \\ + \alpha(x_n - x_1) sign(x_1 - x_n) sign(y_{n-1})] + \\ +\varphi(x_n) sign(\Delta - x_n) sign(y_{n-1}) + \\ + \varphi(x_n) sign(x_n - \Delta) sign(V - y_n), \; t \in [0, +\infty).$$

Теперь необходимо описать закон, по которому меняется число задействованных узлов на перегонных путях. На произвольный перегонный путь грузопоток поступает и с него отправляется как в рамках первой, так и второй технологий. Вспоминая описанные выше обе технологии несложно убедиться, что интенсивность движения грузопотока на перегонных путях будет описываться следующими дифференциальными уравнениями

$$\dot{y}_1 = \alpha(x_1 - x_n) sign(x_1 - x_n) - \alpha(x_3 - x_2) sign(x_3 - x_2) + \\ +\varphi(x_1) sign(x_1 - \Delta) sign(V - y_1) - \varphi(x_2) sign(\Delta - x_2) sign(y_1), \\ t \in [0, +\infty);$$

$$\dot{y}_i = \alpha(x_i - x_{i-1}) sign(x_i - x_{i-1}) - \alpha(x_{i+2} - x_{i+1}) sign(x_{i+2} - x_{i+1}) + \\ + \varphi(x_i) sign(x_i - \Delta) sign(V - y_i) - \\ -\varphi(x_{i+1}) sign(\Delta - x_{i+1}) sign(y_i), \; i = 2, ..., n-1, \; t \in [0, +\infty);$$

$$\dot{y}_n = \alpha(x_n - x_{n-1}) sign(x_n - x_{n-1}) - \alpha(x_2 - x_1) sign(x_2 - x_1) + \\ +\varphi(x_n) sign(x_n - \Delta) sign(V - y_n) - \\ - \varphi(x_1) sign(\Delta - x_1) sign(y_n), \quad t \in [0, +\infty).$$

Линейная часть правых частей этих уравнений описывает интенсивность движения грузопотока на перегонных путях в рамках первой технологии, а нелинейная часть — в рамках второй технологии.

Кроме этого, должны выполняться следующие неравенства

$$0 \le y_i(t) \le V, \quad i = 1, ..., n, \quad t \in [0, +\infty).$$

Эти неравенства накладывает ограничение на число задействованных узлов на перегонных путях. Окончательно, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается следующим образом:

$$\dot{x}_1 = \alpha(x_n - x_1) sign(x_n - x_1) + \\ + \alpha(x_n - x_1) sign(x_1 - x_n) sign(V - y_1) -$$

$$-[\alpha(x_1 - x_2)\, sign(x_1 - x_2) +$$
$$+\,\alpha(x_1 - x_2)\, sign(x_2 - x_1) sign(y_n)] +$$
$$+\varphi(x_1)\, sign(\Delta - x_1)\, sign(y_n) +$$
$$+\,\varphi(x_1)\, sign(x_1 - \Delta)\, sign(V - y_1), \quad t \in [0, +\infty) \qquad (9)$$

$$\dot{x}_i = \alpha(x_{i-1} - x_i) sign(x_{i-1} - x_i) +$$
$$+\,\alpha(x_{i\ \ 1} - x_i) sign(x_i - x_{i\ \ 1}) sign(V - y_i) -$$
$$-[\alpha(x_i - x_{i+1}) sign(x_i - x_{i+1}) +$$
$$+\,\alpha(x_i - x_{i+1}) sign(x_{i+1} - x_i) sign(y_{i\ \ 1})] +$$
$$+\varphi(x_i) sign(\Delta - x_i) sign(y_{i-1}) + \varphi(x_i) sign(x_i - \Delta) sign(V - y_i),$$
$$i = 2, ..., n-1, \ \ t \in [0, +\infty) \qquad (10)$$

$$\dot{x}_n = \alpha(x_{n-1} - x_n) sign(x_{n-1} - x_n) +$$
$$+\,\alpha(x_{n-1} - x_n)\, sign(x_n - x_{n-1})\, sign\,(V - y_n) -$$
$$-[\alpha(x_n - x_1)\, sign(x_n - x_1) +$$
$$+\,\alpha(x_n - x_1)\, sign(x_1 - x_n)\, sign(y_{n-1})] +$$
$$+\varphi(x_n) sign(\Delta - x_n) sign(y_{n-1}) +$$
$$+\,\varphi(x_n) sign(x_n - \Delta) sign(V - y_n), \quad t \in [0, +\infty) \qquad (11)$$

$$\dot{y}_1 = \alpha(x_1 - x_n) sign(x_1 - x_n) - \alpha(x_3 - x_2) sign(x_3 - x_2) +$$
$$+\varphi(x_1) sign(x_1 - \Delta) sign(V - y_1) -$$
$$-\,\varphi(x_2) sign(\Delta - x_2) sign(y_1), \quad t \in [0, +\infty) \qquad (12)$$

$$y_i = \alpha(x_i - x_{i-1}) sign(x_i - x_{i-1}) - \alpha(x_{i+2} - x_{i+1}) sign(x_{i+2} - x_{i+1}) +$$
$$+\,\varphi(x_i) sign(x_i - \Delta) sign(V - y_i) - \qquad (13)$$
$$-\varphi(x_{i+1}) sign(\Delta - x_{i+1}) sign(y_i), \ \ i = 2, ..., n-1, \ t \in [0, +\infty)$$

$$\dot{y}_n = \alpha(x_n - x_{n-1}) sign(x_n - x_{n-1}) - \alpha(x_2 - x_1) sign(x_2 - x_1) +$$
$$+\varphi(x_n) sign(x_n - \Delta) sign(V - y_n) - \varphi(x_1) sign(\Delta - x_1) sign(y_n),$$
$$t \in [0, +\infty) \qquad (14)$$

$$0 \le y_i(t) \le V, \quad i = 1, ..., n, \quad t \in [0, +\infty) \qquad (15)$$

$$x_i(t) = x_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, ..., n-1, \quad t \in [0, +\infty) \qquad (16)$$

$$x_n(t) = x_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty) \qquad (17)$$

Система дифференциальных уравнений (9)-(14) имеет три типа стационарных решений. Опишем их.

1. $x_i = \Delta, \quad y_i = c_i, \quad 0 \le c_i \le V, \quad i = 1, ..., n;$
2. $x_i = b, \quad b < \Delta, \quad y_i = 0, \quad i = 1, ..., n;$
3. $x_i = b, \quad b > \Delta, \quad y_i = V, \quad i = 1, ..., n.$

Очевидно, что эти решения удовлетворяют также и условиям (15)-(17). Аналитическое исследование других решений системы (9)-(17) (если они существуют) крайне затруднительно, т.к. правые части дифференциальных уравнений (9)-(14) являются разрывными функциями. В связи с этим система (9)-(17) была исследована численно. Приведем результаты численного исследования.

4. Численная реализация системы (9) - (17)

Вначале были исследованы все решения системы (9)-(15) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (16)-(17)). В численных экспериментах значение *n* было равным 5. Как показывают численные эксперименты при любых положительных координатах начального значения решения системы (9)-(15) сходятся к одному из трех указанных типов стационарных решений. Например, на *рис.1* и *рис. 2* решения системы (9)-(15) сходятся к стационарному решению первого типа.

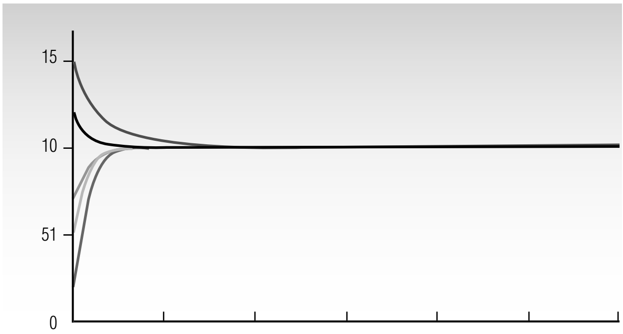

Рис. 1. Количество задействованных узлов на станциях

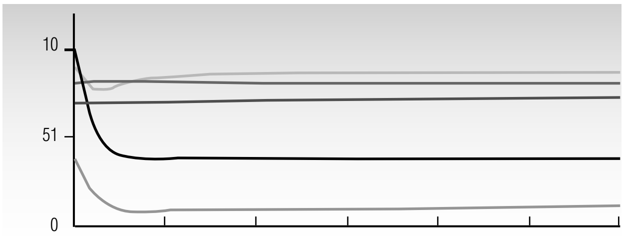

Рис. 2. Количество задействованных узлов на перегонных путях

Здесь $\Delta = 10$, $V = 20$,

$x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 15$, $x_3(0) = 5$, $x_4(0) = 7$, $x_5(0) = 12$,
$y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 9$, $y_3(0) = 4$, $y_4(0) = 8$, $y_5(0) = 10$.

Рис. 3. Количество задействованных узлов на станциях

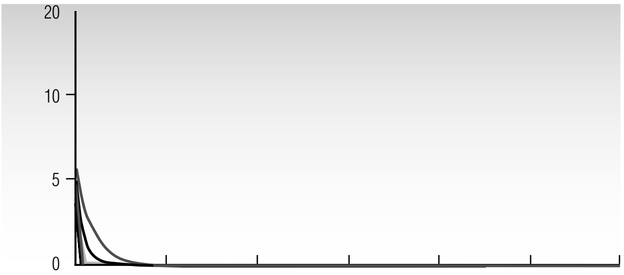

Рис. 4. Количество задействованных узлов на перегонных путях

На *рис. 3* и *рис. 4* решения системы (9)-(15) сходятся к стационарному решению второго типа.

Здесь $\Delta = 10,\ V = 20$,

$x_1(0) = 4,\ x_2(0) = 5,\ x_3(0) = 2,\ x_4(0) = 3,\ x_5(0) = 6$,

$y_1(0) = 7,\ y_2(0) = 2,\ y_3(0) = 4,\ y_4(0) = 3,\ y_5(0) = 5$.

На *рис. 5* и *рис. 6* решения системы (9)-(15) сходятся к стационарному решению третьего типа.

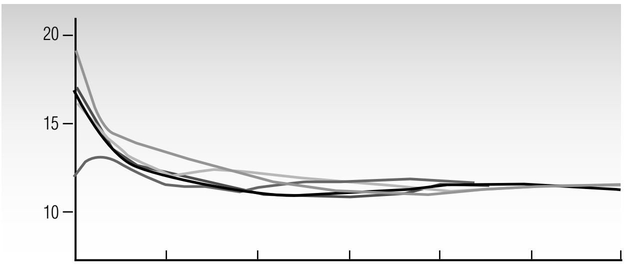

Рис. 5. Количество задействованных узлов на станциях

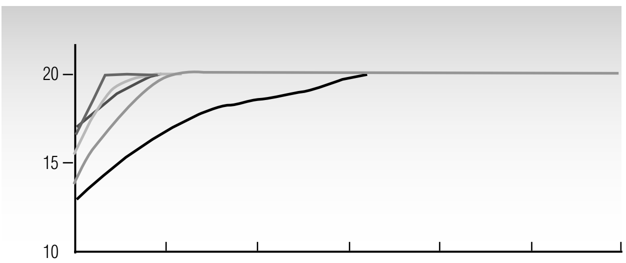

Рис. 6. Количество задействованных узлов на перегонных путях

Здесь $\Delta = 10,\ V = 20$,

$x_1(0) = 12,\ x_2(0) = 18,\ x_3(0) = 16,\ x_4(0) = 19,\ x_5(0) = 17$,

$y_1(0) = 17,\ y_2(0) = 15,\ y_3(0) = 14,\ y_4(0) = 16,\ y_5(0) = 13$.

Поскольку произвольное решение системы (9)-(15) с положительными координатами начального значения сходится к стационарному решению одного из трех типов, то указанная система не имеет других решений, которые удовлетворяют условиям (16)-(17) бегущей волны, кроме стационарных. Таким образом, система (9)-(17) с положительными координатами начального значения имеет только стационарные решения.

5. Область устойчивости стационарных решений

Стационарные решения системы (9)-(17) исследованы на устойчивость в классе всех решений системы (9)-(15). Здесь следует отметить, что понятие устойчивости применяется только к компонентам стационарного решения, описывающим интенсивность грузопотока на станциях. Таким образом, стационарное решение системы (9)-(17) называется устойчивым, если компоненты произвольного решения системы (9)-(15), описывающие интенсивность грузопотока на станциях, т.е. $x_i(.)$, $i = 1, \ldots n$ близкие к соответствующим компонентам стационарного решения в начальный момент времени сколь угодно близко к ним приближаются, начиная с некоторого момента времени. Как показали численные эксперименты, стационарные решения системы (9)-(17)

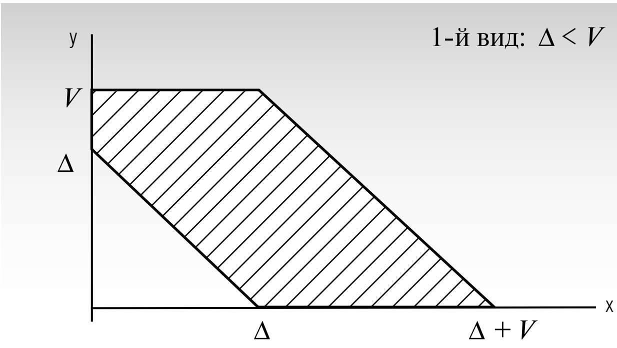

Рис. 7

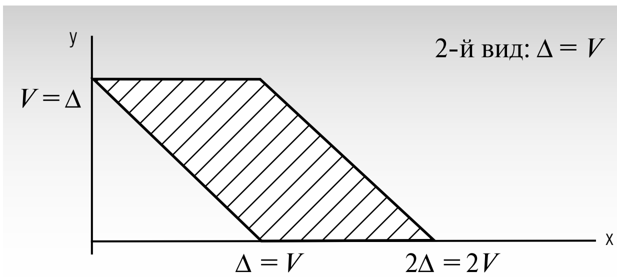

Рис. 8

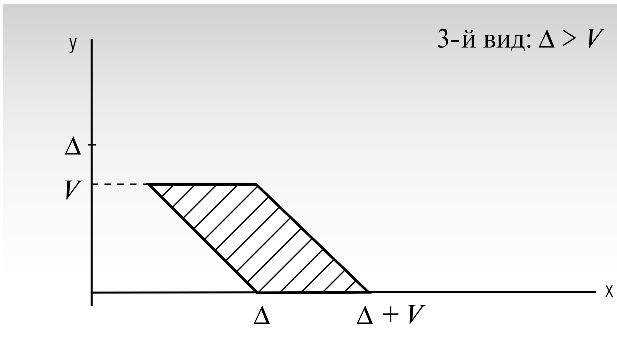

Рис. 9

второго и третьего типов являются неустойчивыми, а первого – устойчивыми. С помощью численных экспериментов определена область устойчивости. В зависимости от взаимного расположения на числовой прямой точек Δ и V получаются три вида областей устойчивости.

По оси x откладывается среднее значение числа задействованных узлов на станциях, а по оси y – среднее значение числа задействованных узлов на перегонных путях в начальный момент времени.

Вернемся к стационарным режимам. С экономической точки зрения наиболее оптимальным является первый режим. Во-первых, только он является устойчивым. Во-вторых, в этом режиме наиболее эффективно используются возможности станций и при этом можно организовать бесперебойную работу системы. Из *рис. 7, 8* и *9* следует, что система переходит в стационарный режим первого типа, если сумма средних значений чисел задействованных узлов на станциях и чисел задействованных узлов на перегонных путях в начальный момент времени не меньше Δ и при этом не превышает значения $\Delta + V$. Если сумма средних значений чисел задействованных узлов на станциях и чисел задействованных узлов на перегонных путях в начальный момент времени меньше Δ, то система переходит в стационарный режим второго типа. Наконец, если сумма средних значений чисел задействованных узлов на станциях и чисел задействованных узлов на перегонных путях в начальный момент времени больше $\Delta + V$, то система переходит в стационарный режим третьего типа.

6. Заключение

В данной статье изучена модель организации грузоперевозок с заданной системой контроля, учитывающая ограниченность емкостей перегонных путей. Такая модель описывается системой дифференциальных уравнений, удовлетворяющих дополнительным условиям, которые определяют систему контроля (задают решения типа бегущей волны) и накладывают ограничения на емкости перегонных путей. Указанная система имеет три типа стационарных решений. Аналитическое исследование множества всех решений сильно осложняется тем, что правые части дифференциальных уравнений являются разрывными функциями. В связи с этим данная модель была исследована численно. Численное исследование позволило показать, что описываемая модель не имеет других режимов грузоперевозок кроме стационарных, удовлетворяющих заданной системе контроля (т.е. решений типа бегущей волны). Кроме того были решены следующие задачи:

– стационарные режимы грузоперевозок исследованы на устойчивость в классе всех режимов (т.е. не только решений типа бегущей волны);

– для устойчивых режимов грузоперевозок определена область их устойчивости. ■

Литература

1. Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К. Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – № 10.
2. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
3. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта: Сб. научных статей. – М.: Изд-во АН СССР. – 1949. – С. 110-138.
4. Данциг Дж., Вольф Ф. Алгоритм разложения для задач линейного программирования // Математика: Сб. переводов. – 1964. – Т. 8, № 1. – С. 151-160.
5. Авен О.И., Ловецкий С.Е., Моисеенко Г.Е. Оптимизация транспортных потоков. – М.: Наука, 1985.
6. Галабурда В.Г. Совершенствование технологии перевозок и увеличение пропускной способности железных дорог. – М.: МИИТ, 1983.
7. Галабурда В.Г. Оптимальное планирование грузопотоков. – М.: Транспорт, 1985.
8. Козовский И.Г. Рационализация перевозок грузов на железных дорогах. – М.: Транспорт, 1977.
9. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional differential equations. – 2006. – V. 13, № 2. – P. 125-155.
10. Хачатрян Н.К. О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №3. – С. 137-149.
11. Хачатрян Н.К. Динамическая модель транснациональных грузоперевозок / Препринт #WP/2002/145. – М.: ЦЭМИ РАН, 2002.