

О квазирешениях типа бегущей волны в моделях организации грузоперевозок¹

Н.К. Хачатрян

кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник лаборатории динамических моделей экономики и оптимизации
Центральный экономико-математический институт Российской академии наук;
доцент кафедры бизнес-аналитики
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47
E-mail: nerses@cemi.rssi.ru; nkachatryan@hse.ru

А.С. Акопов

доктор технических наук
профессор кафедры бизнес-аналитики
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;
ведущий научный сотрудник лаборатории динамических моделей экономики и оптимизации
Центральный экономико-математический институт Российской академии наук
Адрес: 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
E-mail: aakopov@hse.ru

Ф.А. Белоусов

научный сотрудник лаборатории динамических моделей экономики и оптимизации
Центральный экономико-математический институт Российской академии наук;
доцент кафедры бизнес-аналитики
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47
E-mail: sky_ft@list.ru; fbelousov@hse.ru

Аннотация

Статья посвящена построению и исследованию модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями, соединенными железнодорожной линией, которая содержит определенное количество промежуточных станций. Организация грузопотока осуществляется с помощью ряда технологий. Эти технологии определяют правило подачи грузов на начальную узловую станцию, правила взаимодействия соседних станций, а также правило распределения грузов с конечной узловой станцией. Процесс грузоперевозок сопровождается заданным правилом контроля, состоящем в измерении объемов перевозимых грузов на соседних станциях с единым лагом времени. Для такой модели требуется определить возможные режимы грузоперевозок и описать их свойства. Движение грузопотока описывается конечно-разностным аналогом нелинейного параболического уравнения. Система контроля задается нелокальными ограничениями, что выделяет решения типа бегущей волны. Класс таких решений оказывается чрезвычайно узким. Это приводит к необходимости «правильного» расширения класса решений типа бегущей волны до класса квазирешений типа бегущей волны. Один тип расширения предполагает допущения разрывных решений типа бегущей волны, второй тип допускает нарушения в малом системы контроля. Существенным недостатком разрывных решений типа бегущей волны является их неограниченность. В данной работе исследуются квазирешения, полученные с помощью второго типа расширения. Отличительной особенностью таких квазирешений является допущение выполнимости нелокальных ограничений с заданной погрешностью. Исследуется вопрос об ограниченности таких квазирешений. С помощью компьютерной реализации модели исследуется зависимость погрешности в выполнении нелокальных ограничений от параметров модели, которые являются характеристиками технологий, с помощью которых осуществляется грузопоток.

¹ Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 16-01-00110)

Ключевые слова: математическое моделирование процесса грузоперевозок, правило контроля, дифференциальные уравнения, нелокальные ограничения, квазирешения, численная реализация.

Цитирование: Хачатрян Н.К., Акопов А.С., Белоусов Ф.А. О квазирешениях типа бегущей волны в моделях организации грузоперевозок // Бизнес-информатика. 2018. № 1 (43). С. 61–70.

DOI: 10.17323/1998-0663.2018.1.61.70.

Введение

Одной из ключевых отраслей любого государства является транспорт. Среди основных задач транспорта можно выделить планирование перевозок и организацию процесса перевозок. Для страны с большой территорией (такой, как Россия) вторая задача становится особенно актуальной. Проблеме организации грузоперевозок посвящено множество исследований, в частности, она рассмотрена в работах [1–7]. В работах [8–10] исследована модель организации грузоперевозок на протяженном участке пути с большим количеством промежуточных станций, через которые осуществляется грузопоток. Предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегон, где временно может храниться часть грузов (в специальной зоне хранения). Емкость таких зон хранения считается неограниченной. Движение грузов происходит в одном направлении. Организация грузопотока осуществляется с помощью двух технологий. Первая технология задает правила взаимодействия соседних станций, а вторая – правила взаимодействия станций с соседними зонами хранения. Одной из задач второй технологии является обеспечение бесперебойного грузопотока. Подробное описание этих технологий приведено в работе [8].

Для грузоперевозок используется простая система контроля. Она заключается в том, что объемы обрабатываемых грузов для любого планового интервала времени на всех станциях должны совпадать с определенным лагом времени, единым для всех станций. Рассмотрены несколько вариантов модели. Один из вариантов модели описывает грузоперевозки между двумя узловыми станциями и задается следующей системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями [8]:

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \quad (3)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (4)$$

где $z_i(t)$ – число задействованных узлов на i -й станции в момент времени t , $i = 0, 1, \dots, m+1$.

Функции $\psi_1(\cdot) \geq 0$ и $\psi_2(\cdot) \geq 0$ определяют, соответственно, интенсивность подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станцией. Функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ определяют, соответственно, скорость изменения числа задействованных узлов обработки на начальной станции и скорость изменения числа задействованных узлов обработки на остальных станциях в рамках второй технологии. Описание свойств функций $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$, а также их графиков дано в работе [8]. Здесь же отметим, что указанные функции, а также функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ являются непрерывными.

Обозначим $c_0 = -\dot{\varphi}_0(\Delta)$ и $c = -\dot{\varphi}(\Delta)$, где Δ – число задействованных узлов, при превышении которого часть грузов отправляется в зону хранения. Параметры c_0 и c определяют, соответственно, интенсивность отправки грузов с начальной и промежуточных станций в зоны хранения. Нелокальные линейные ограничения (4) задают систему контроля над процессом грузоперевозок, а параметр τ является ее характеристикой.

Как отмечено в работе [8], класс решений системы (1) – (4) чрезвычайно узок, поэтому, рассматривалось его расширение до класса «квазирешений», отличительной особенностью которых являлось наличие разрывов в счетном количестве точек. В работе [10] доказана теорема существования и единственности квазирешения. В работе [8] приведены результаты численного исследования системы (1) – (4). Основной задачей исследования являлась изучение динамики ее квазирешений, а также их зависимости от некоторых параметров модели, характеризующих правило контроля (τ), технологии перевозки грузов (α) и интенсивность подачи грузов на начальную узловую станцию (функция $\psi_1(\cdot)$). Согласно результатам численных исследований, квазирешения системы (1) – (4) мажорируют

ся экспоненциальными функциями, рост которых уменьшается с увеличением α и τ . Значения параметра α ограничено в силу ограниченности технологических возможностей станций, а при больших значениях τ система контроля теряет свою актуальность. Следовательно, через относительно небольшой промежуток времени число задействованных узлов на станциях станет существенно больше Δ , что повлечет за собой сбой в организации грузоперевозок. Таким образом, с практической точки зрения неограниченность квазирешений системы (1) – (4) является недостатком модели. Напомним, что определенные выше квазирешения, в отличие от решений, содержат разрывы в точках, кратных характеристике системы контроля. Назовем их квазирешениями первого типа.

Далее рассмотрим другой возможный способ расширения класса решений типа бегущих волн до класса решений типа «квазибегущих» волн, а именно – при ослаблении нелокальных ограничений (4) (допущении выполнения этих ограничений с некоторой погрешностью).

Определение 1. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется ε -квазирешением типа бегущей волны второго типа с характеристикой $\tau > 0$ для системы (1) – (4), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе уравнений (1) – (3) и выполняется условие $|z_i(t) - z_{i+1}(t + \tau)| < \varepsilon$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $t \in [0, +\infty)$.

1. Об ограниченных решениях системы (1) – (3)

Прежде чем перейти к исследованию квазирешений системы (1) – (4) второго типа, изучим множество всех решений системы уравнений (1) – (3). Очевидно, что при любых начальных условиях данная система имеет единственное решение. Докажем, что при определенном выборе функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ решения системы уравнений (1) – (3) являются ограниченными.

Теорема 1. Пусть функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ ограничены на полупрямой $[0, +\infty)$. Тогда решения системы дифференциальных уравнений (1) – (3) являются ограниченными.

Доказательство. Рассмотрим первую компоненту решения системы дифференциальных уравнений (1) – (3), т.е. функцию $z_0(\cdot)$. Данная функция является либо ограниченной, либо неограниченной. Предположим, что она является неограничен-

ной сверху. Тогда существует последовательность $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_0(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_0(t_n) > 0. \quad (5)$$

Тогда из уравнения (1) и, в частности, из определения функции $\varphi_0(\cdot)$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_1(t_n) > 0,$$

а также выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_1(t_n) - z_0(t_n)] > 0. \quad (6)$$

Из неравенства (6) и первого уравнения системы дифференциальных уравнений (2) также следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_2(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_2(t_n) > 0,$$

и выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_2(t_n) - z_1(t_n)] > 0.$$

Действуя по индукции, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{m+1}(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_{m+1}(t_n) > 0, \quad (7)$$

и выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_{m+1}(t_n) - z_m(t_n)] > 0. \quad (8)$$

Из соотношений (7) – (8) следует, что левая часть уравнения (3) положительна, а правая – отрицательна. Данное противоречие связано с предположением о неограниченности функции $z_0(\cdot)$ сверху. Таким образом, функция $z_0(\cdot)$ не может быть неограниченной сверху. Точно так же можно показать, что она не может быть неограниченной снизу. Итак, функция $z_0(\cdot)$ является ограниченной.

Докажем, что остальные компоненты решения системы дифференциальных уравнений (1) – (3) также будут ограниченными. Начнем с функции $z_1(\cdot)$. Предположим, что данная функция является неограниченной сверху. Тогда существует последовательность $\{t'_n\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1(t'_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_1(t'_n) > 0.$$

Далее, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве ограниченности функции $z_0(\cdot)$, можно показать, что имеют место соотношения (7) и (8), где последовательность $\{t_n\}$ будет заменена последовательностью $\{t'_n\}$. Следовательно, для выбранной последовательности $\{t'_n\}$ левая часть дифференциального уравнения (3) будет положи-

тельной, а правая – отрицательной. Данное противоречие связано с предположением о неограниченности функции $z_1(\cdot)$ сверху. Таким образом, функция $z_1(\cdot)$ также не может быть неограниченной сверху. Точно так же можно показать, что она не может быть неограниченной снизу. Методом индукции, из системы дифференциальных уравнений (2) можно показать ограниченность функций $z_i(\cdot)$, $i = 2, 3, \dots, m + 1$.

Итак, согласно теореме 1, при ограниченности функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, что с экономической точки зрения вполне естественно, решения системы дифференциальных уравнений (1) – (3) являются ограниченными. Для более детального исследования решений система (1) – (3) была реализована численно с помощью Метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Прежде чем перейти к описанию численного решения данной системы, необходимо определить функции $\varphi(\cdot)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Функция $\varphi(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ задается с помощью параболы $y = -ax^2 + bx$, где $a > 0$, $y(\Delta) = 0$. Таким образом, коэффициенты параболы связаны соотношением $b = a\Delta$. Очевидно, что чем больше a , тем больше ордината вершины указанной параболы, а, следовательно, интенсивность приема грузов по второй технологии. В качестве $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ будем использовать два класса функций:

- а) постоянная функция $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$;
- б) периодическая функция $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma$.

2. Квазирешения системы (1) – (4) второго типа с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) – (3), в которой $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$, $d > 0$. Это означает, что на начальную узловую станцию грузопоток осуществляется с постоянной интенсивностью d и с такой же интенсивностью распределяется с конечной узловой станцией. Будем исследовать зависимость решений системы (1) – (3) от параметров модели α, a, c_0, c, d . Отметим, что все указанные параметры являются положительными. Согласно результатам численных экспериментов, начиная с некоторого момента времени, решения системы (1) – (3) выходят на постоянные значения для всех значений параметров α, a, c_0, c, d этой системы, т.е. существует $\bar{t} > 0$, такое, что выполняются условия:

$$z_0(t) = d_0, z_1(t) = d_1, \dots, z_m(t) = d_m, z_{m+1}(t) = d_{m+1}, t \in [\bar{t}, +\infty),$$

причем числа $d_i, i = 0, 1, \dots, m, m + 1$ удовлетворяют условию:

$$d_0 > d_1 > \dots > d_m > d_{m+1}.$$

Например, на рисунке 1 приведено одно из решений системы (1) – (3).

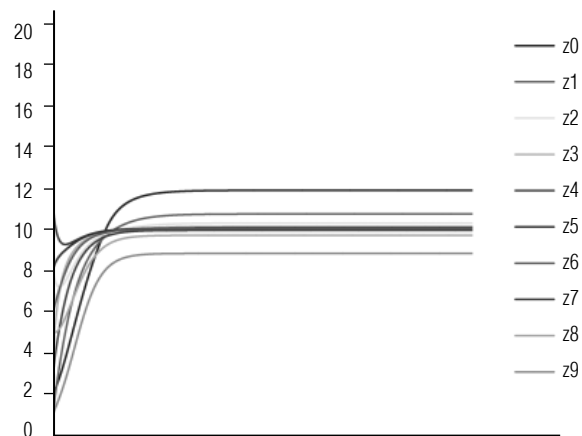


Рис. 1. График решения системы (1) – (3) с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Данное решение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров: $\alpha = 1$, $a = 0, 2$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$.

Обозначим $\bar{d}_i = d_i - \Delta, i = 0, 1, \dots, m, m + 1$. Таким образом, числа \bar{d}_i определяют отклонение решений от значения Δ , определяющего пропускную способность станций. На рисунке 2 приведем гистограмму чисел \bar{d}_i , полученных по решениям системы (1) – (3), график которых изображен на рисунке 1.

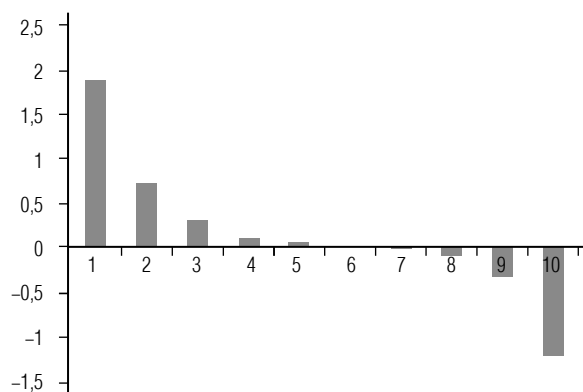


Рис. 2. Гистограмма отклонений решений системы (1) – (3) от значения Δ (базовый случай)

Как видно из рисунка 2, наибольшие отклонения от значения Δ имеют первая и последняя компоненты решения системы (1) – (3). По мере приближения к

центральному компоненту решения, указанные отклонения уменьшаются, причем присутствуют как положительные, так и отрицательные отклонения. Приведем содержательную интерпретацию гистограммы 2. Для этого отметим, что если число задействованных узлов на станции равно Δ , то это означает, что на данной станции полностью используется тот объем инфраструктурных возможностей, который позволяет организовать бесперебойный грузопоток. Положительное отклонение от значения Δ указывает на то, что станция подключает дополнительные мощности и при этом возможны перебои в организации грузоперевозок, а отрицательное — о возможности дополнительной загрузки. Таким образом, центральные станции оптимально используют инфраструктурные возможности. Начальная узловая станция и станции, расположенные рядом с ней, наиболее загружены, а конечная узловая станция и станции, расположенные рядом с ней, не в полном объеме используют инфраструктурные возможности.

Исследуем зависимость \bar{d}_i от параметров модели. Начнем с параметра α . Напомним, что он определяет нормативные правила взаимодействия соседних станций. Будем увеличивать значение параметра α при неизменных значениях других параметров. Согласно результатам экспериментов, имеет место следующая закономерность: абсолютная величина максимального отклонения решения системы (1) – (3) от значения Δ , т.е. $\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i|$ уменьшается с увеличением параметра α , но при этом для центральных компонент решения эти отклонения могут увеличиваться. Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 3. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра α , равных 2, 5, 10 и 100 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $a = 0,2$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Следовательно, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется значения параметра $\bar{\alpha}$ такое, что при всех $\alpha \geq \bar{\alpha}$ (и при неизменных значениях других параметров) будет выполняться неравенство

$$\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Перейдем к исследованию отклонений \bar{d}_i от параметра a , который определяет интенсивность приема грузов с помощью второй технологии, задающей правило взаимодействия станции с соседними зонами хранения. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Напомним, что это приводит к увеличению интенсивности приема грузов по второй технологии. Как показывают эксперименты,

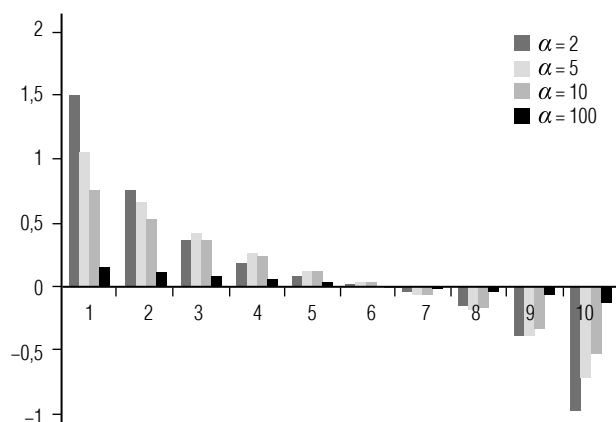


Рис. 3. Гистограмма отклонений решений системы (1) – (3) от значения Δ при изменении параметра α

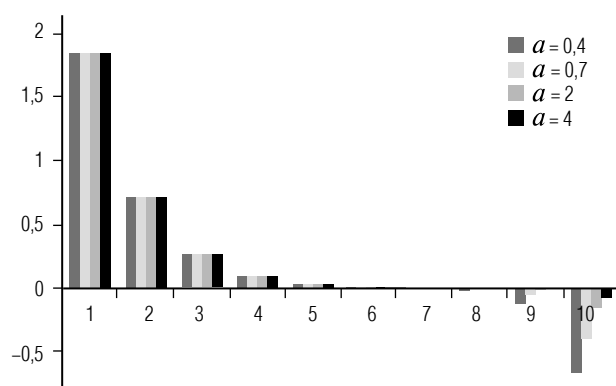


Рис. 4. Гистограмма отклонений решений системы (1) – (3) от значения Δ при изменении параметра a

это приводит к уменьшению абсолютных величин отрицательных отклонений \bar{d}_i . При этом положительные отклонения \bar{d}_i не меняются. Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 4. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра a , равных 0,4, 0,7, 2 и 4 и следующих фиксированных значений остальных параметров: $\alpha = 1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Отметим, что, при таких значениях параметра a и $\Delta = 10$ ордината вершины параболы принимает, соответственно, значения: 10, 17,5, 50 и 100.

Заметим, что параметр a присутствует во всех уравнения системы (1) – (3), кроме первого. Следовательно, увеличивая параметр a , мы увеличиваем интенсивность приема грузов по второй технологии на всех станциях, за исключением начальной. Оказывается, что такого же эффекта, а именно уменьшения абсолютных величин отрицательных отклонений \bar{d}_i , можно достичь, меняя параметр a только в последнем уравнении системы (1) – (3), т.е. увеличивая интенсивность приема грузов по второй технологии только на конечной узловой станции.

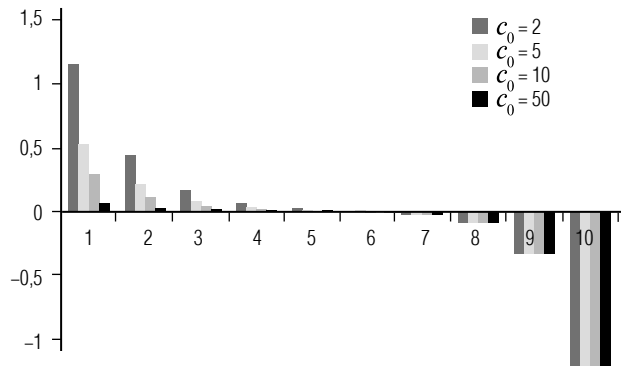


Рис. 5. Гистограмма отклонений решений системы (1)–(3) от значения Δ при изменении параметра c_0

Перейдем к исследованию отклонений \bar{d}_i от параметра c_0 , определяющего интенсивность отправки грузов с начальной узловой станции в зону хранения. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Напомним, что это приводит к увеличению интенсивности отправки грузов с начальной узловой станции в зону хранения. Как показывают эксперименты, это приводит к уменьшению положительных отклонений \bar{d}_i . При этом отрицательные отклонения \bar{d}_i не меняются. Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 5.

На рисунке представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра c_0 , равных 2, 5, 10 и 50 и следующих фиксированных значений остальных параметров $\alpha = 1, a = 0, 2, c = 1, d = 3$.

Таким образом, увеличение параметра a в последнем уравнении системы (1) – (3) и параметра c_0 приводит к уменьшению абсолютной величины максимального отклонения решения системы (1) – (3) $\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i|$ от значения Δ . Это в свою очередь означает, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдутся значения параметров \bar{a} и \bar{c}_0 , такие, что при всех $a > \bar{a}$, $c_0 > \bar{c}_0$ (и при неизменных значениях других параметров) будет выполняться неравенство (9).

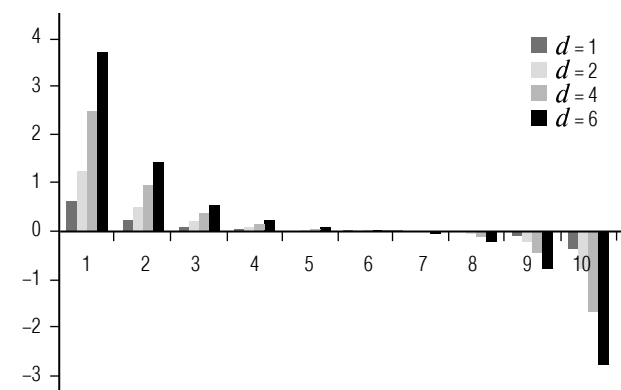


Рис. 6. Гистограмма отклонений решений системы (1) – (3) от значения Δ при изменении параметра d

Наконец, перейдем к исследованию отклонений d_i от параметра d , представляющего собой интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Как показывают эксперименты, это приводит к увеличению абсолютных значений отклонений d_i . Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 6. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра d , равных 1, 2, 4 и 6 и следующих фиксированных значений остальных параметров $\alpha = 1, a = 0, 2, c_0 = c = 1$.

Следует отметить, что при уменьшении параметра d абсолютные значения отклонений d_i уменьшаются вплоть до нуля для $d = 0$. В этом случае решение системы (1) – (3) сходится к стационарному решению

$$z_0(t) = z_1(t) = \dots = z_m(t) = z_{m+1}(t) \equiv \Delta.$$

Эта ситуация показана на рисунке 7.

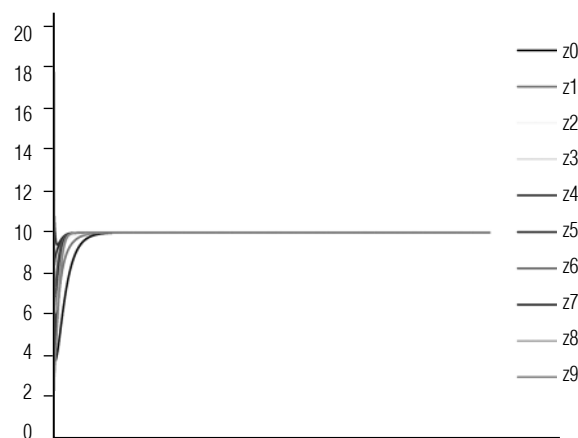


Рис. 7. График решения системы (1) – (3) при $d = 0$

Приступим к анализу результатов, полученных выше с помощью численных экспериментов. Согласно их результатам для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ с помощью управления параметрами α, a, c_0 можно достичь выполнимости неравенства (9). Основной целью проведенного исследования является получение ε -квазирешений типа бегущей волны с характеристикой $\tau > 0$ для системы (1) – (4), т.е. организация контролируемого грузопотока с помощью определенных выше технологий. Несложно заметить, что решения системы (1) – (3), удовлетворяющие условию (9) являются ε -квазирешениями типа бегущей волны с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (1) – (4).

Итак, мы выявили два способа получения ε -квазирешений типа бегущей волны с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (1) – (4). Первый способ связан с увеличением параметра α , а второй – с увеличением параметров a и c_0 , причем параметр a достаточно увеличить только в последнем уравнении системы (1) – (3). Очевидно, что эти два способа можно также комбинировать между собой. С практической точки зрения первый способ связан с улучшением инфраструктуры на всех станциях, а второй – с улучшением инфраструктуры только на узловых станциях, вследствие чего последний является более простым в применении.

3. Квазирешения системы (1) – (4) второго типа с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) – (3), в которой функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ описывающие, соответственно, интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции являются периодическими, т.е.

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t), \quad d \geq \gamma.$$

Согласно результатам численных экспериментов, начиная с некоторого момента времени $\bar{t} > 0$ решения системы (1) – (3) начинают колебаться в некоторой окрестности значения Δ , причем компоненты решения удовлетворяют условию $z_0(t) > z_1(t) > \dots > z_m(t) > z_{m+1}(t)$ для любого $t \in [\bar{t}, +\infty)$.

Более того, существует натуральное число $0 < \bar{m} < m + 1$ такое, что

$$z_i(t) > \Delta, \text{ для } 0 \leq i \leq \bar{m}, t \in [\bar{t}, +\infty),$$

$$z_i(t) < \Delta, \text{ для } \bar{m} < i \leq m + 1, t \in [\bar{t}, +\infty).$$

Например, на *рисунке 8* приведено одно из решений системы (1) – (3).

Данное решение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров:

$$\alpha = 1, a = 0,2, c_0 = c = 1, d = 2, \gamma = 1, \omega = 1.$$

Обозначим

$$\bar{d}_i = \begin{cases} \max_{t \in [\bar{t}, +\infty)} (z_i(t) - \Delta), & \text{если } 0 \leq i \leq \bar{m} \\ \min_{t \in [\bar{t}, +\infty)} (z_i(t) - \Delta), & \text{если } \bar{m} < i \leq m + 1. \end{cases}$$

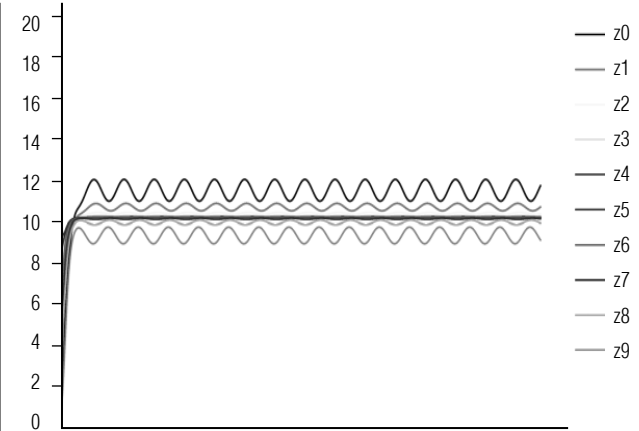


Рис. 8. График решения системы (1) – (3) с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Таким образом, число \bar{d}_i определяет максимальное отклонение i -й компоненты решения системы (1) – (3) от значения Δ , определяющего пропускную способность станций. Очевидно, что числа \bar{d}_i удовлетворяют условию

$$\bar{d}_0 > \bar{d}_1 > \dots > \bar{d}_m > \bar{d}_{m+1};$$

$$\bar{d}_i > 0, 0 \leq i \leq \bar{m}; \bar{d}_i < 0, \bar{m} < i \leq m + 1.$$

Исследуем зависимость \bar{d}_i от параметров модели. Численные эксперименты показали, что зависимость \bar{d}_i от параметров α, a, c_0, c, d такая же, как и в случае постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. В частности, с помощью соответствующего выбора параметров α, a, c_0 можно абсолютные значения отклонений \bar{d}_i сделать сколь угодно малыми. Таким образом, как и в случае постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, управляя этими параметрами, определяющими инфраструктурные возможности станций, можно организовать контролируемый грузопоток.

Остается исследовать зависимость \bar{d}_i от параметров γ и ω . В отличие от параметров α, a, c_0 управление только этими параметрами не позволяет сделать сколь угодно малыми абсолютные значения отклонений \bar{d}_i и, соответственно, организовать контролируемый грузопоток. Тем не менее, исследуем зависимость \bar{d}_i от γ и ω .

Начнем с параметра γ . Заметим, что данный параметр определяет амплитуду колебаний. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Как показывают эксперименты, это приводит к увеличению абсолютных значений отклонений \bar{d}_i , т.е. зависимость \bar{d}_i от γ такая же, как и от d . Данную тенденцию можно увидеть на *рисунке 9*.

На этом рисунке представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра γ , равных 1, 2, 3 и 4 и следующих фиксированных значений остальных параметров $\alpha = 1$, $a = 0,2$, $c_0 = c = 1$, $d = 5$, $\omega = 1$.

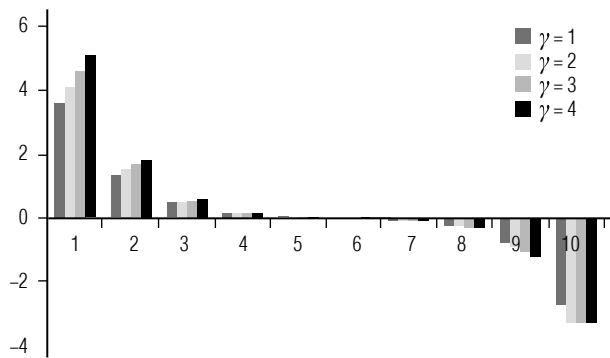


Рис. 9. Гистограмма отклонений решений системы (1) – (3) от значения Δ при изменении параметра γ

Перейдем к исследованию зависимости \bar{d}_i от параметра ω . Так как период функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ равен $2\pi/\omega$, то увеличение параметра ω приводит к уменьшению периода функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. Как показывают эксперименты, зависимость $|\bar{d}_i|$ от ω представляет собой невозрастающую функцию, принимающую значения в некотором интервале, границы которого зависят, как от индекса i , так и от остальных параметров модели. На рисунке 10 представлен широкий диапазон изменения параметра ω – от 0,001 до 400. При этом остальные параметры фиксированы и принимают следующие значения: $\alpha = 1$, $a = 0,2$, $c_0 = c = 1$, $\gamma = 1$, $d = 2$. Как видно из данного рисунка, например, значения \bar{d}_0 меняются в интервале, лежащем в отрезке [1, 2]. Следует от-

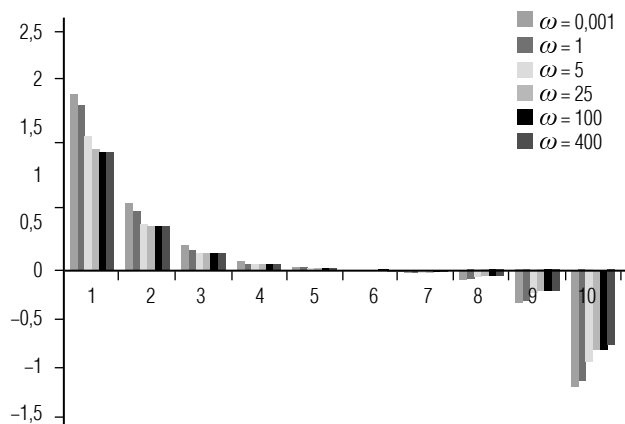


Рис. 10. Гистограмма отклонений решений системы (1) – (3) от значения Δ при изменении параметра ω

метить, что при значениях ω близких к нулю функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ близки к константам, поэтому левую границу указанных интервалов можно определить с помощью постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ (сравнить данную гистограмму при $\omega = 0,001$ с гистограммой, представленной на рисунке 2).

Наконец, проанализируем результаты, полученные в этом параграфе, т.е. в случае, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, описывающие, соответственно, интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции, являются периодическими. Как оказалось, эти результаты качественно не отличаются от результатов, полученных в предыдущем параграфе, т.е. для случая, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ являются константами. Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно получить ε -квазирешения типа бегущей волны с характеристикой $\tau > 0$ для системы (1) – (4), т.е. организовать контролируемый грузопоток с помощью описанных в первом параграфе технологий. Для этого необходимо управлять параметрами α, a, c_0 , которые являются характеристиками используемых технологий. Суть этого управления сводится к улучшению инфраструктуры станций.

Заключение

Данная статья посвящена исследованию модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями, осуществляемой с помощью ряда технологий с заданным правилом контроля. Такая модель описывается конечномерной системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями. Класс решений, удовлетворяющих нелокальным линейным ограничениям (решений типа бегущей волны), оказывается чрезвычайно узким. Это приводит к необходимости «правильного» расширения класса решений типа бегущей волны до класса квазирешений типа бегущей волны. В работах [8–10] приводится один из способов такого расширения, позволяющий получить квазирешения, которые отличаются от решений наличием разрывов в счетном числе точек. Исследование таких квазирешений показало, что они являются неограниченными. С практической точки зрения это является серьезным недостатком, так как квазирешения описывают число задействованных узлов на станциях. В связи с этим предложен иной способ расширения класса решений типа бегущей волны до класса квазирешений типа бе-

гушей волны. Квазирешения, полученные с помощью данного способа, отличаются от решений тем, что для них допускается выполнимость нелокальных ограничений с заданной погрешностью. Показано, что такие квазирешения являются ограни-

ченными. Проведенные численные эксперименты показали, что управляя параметрами модели, можно получить квазирешения, для которых нелокальные ограничения будут выполнены со сколь угодно малой погрешностью. ■

Литература

1. Галабурда В.Г. Совершенствование технологии перевозок и увеличение пропускной способности железных дорог. М.: МИИТ, 1983.
2. Галабурда В.Г. Оптимальное планирование грузопотоков. М.: Транспорт, 1985.
3. Козовский И.Г. Рационализация перевозок грузов на железных дорогах. М.: Транспорт, 1977.
4. Левин Д.Ю. Моделирование процессов перевозки // Мир транспорта. 2010. Т. 8. № 5 (33). С. 48–55.
5. Рубцов А.О., Тарасов А.С. Моделирование железнодорожных перевозок на территории России // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2009. № 46. С. 274–278.
6. de Jong G., Gunn H.F., Walker W. National and international freight transport models: an overview and ideas for further development // Transport Reviews. 2004. Vol. 24. No. 1. P. 103–124.
7. Yamada T., Russ B.F., Castro J., Taniguchi E. Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications // Transportation Science. 2009. Vol. 43. No. 2. P. 129–143.
8. Khachatryan N.K., Akopov A.S. Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution // Business Informatics. 2017. No. 1 (39). P. 25–35.
9. Бекларян Л.А. Хачатрян Н.К. Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 10. С. 1649–1667.
10. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional Differential Equations. 2006. Vol. 13. No. 2. P. 125–155.

About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation²

Nerses K. Khachatryan

Senior Researcher, Laboratory of Dynamic Models of Economy and Optimization
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences;
Associate Professor, Department of Business Analytics
National Research University Higher School of Economics
Address: 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow, 117418, Russian Federation
E-mail: nerses@cemi.rssi.ru; nkachatryan@hse.ru

Andranik S. Akopov

Professor, Department of Business Analytics
National Research University Higher School of Economics;
Leading Researcher, Laboratory of Dynamic Models of Economy and Optimization
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences
Address: 20, Myasnitskaya Street, Moscow, 101000, Russian Federation
E-mail: aakopov@hse.ru

Fedor A. Belousov

Researcher, Laboratory of Dynamic Models of Economy and Optimization
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences;
Associate Professor, Department of Business Analytics
National Research University Higher School of Economics
Address: 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow, 117418, Russian Federation
E-mail: sky_tt@list.ru; fbelousov@hse.ru

² This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 16-01-00110)

Abstract

This article is devoted to the construction and research of a model for organizing cargo transportation between two node stations connected by a railway line which contains a certain number of intermediate stations. The organization of freight traffic is facilitated by a number of technologies. These technologies determine the rules for taking on cargo at the initial node station, the rules of interaction between neighboring stations, as well as the rule of distribution of cargo to the final node stations. The process of cargo transportation is accompanied by the set rule of control consisting in measuring the volumes of goods transported at neighboring stations with a single time lag. For such a model, one must determine possible modes of cargo transportation and describe their properties. Traffic flow is described by a finite-difference analog of the nonlinear parabolic equation. The control system is set by nonlocal restrictions, which distinguishes the solutions of traveling wave type. The class of such solutions is extremely narrow. This results in the need for the “correct” extension of a class of solutions of the traveling wave type to a class of quasi-solutions of the traveling wave type. One type of expansion presupposes assumptions of discontinuous solutions of the traveling wave type; the second type allows for violations in a small control system. An essential lack of discontinuous solutions is their limitlessness. In this work, we investigate quasi-solutions obtained with the help of a second type of extension. The distinctive feature of such quasi-solutions is the assumption of feasibility of not local restrictions with the set error. The question of the limitation of such quasi-solutions is investigated. Using computer model implementation we investigate the dependence of the error in the performance of nonlocal restrictions on model parameters, which are the characteristics of the technologies used to carry out the cargo flow.

Key words: mathematical modeling of cargo transportation process, rule of control, differential equations, non-local restrictions, quasi-solutions, numerical realization.

Citation: Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A. (2018) About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation. *Business Informatics*, no. 1 (43), pp. 61–70. DOI: 10.17323/1998-0663.2018.1.61.70.

References

- Galaburda V.G. (1983) *Sovershenstvovanie tekhnologii perezovok i uvelichenie propusknoy sposobnosti zheleznnykh dorog* [Improvement of transportation techniques and increase in railroad traffic capacity]. Moscow: Moscow State University of Railway Engineering (in Russian).
- Galaburda V.G. (1985) *Optimal'noe planirovanie gruzopotokov* [Optimal planning of cargo traffic]. Moscow: Transport (in Russian).
- Kozovskii I.G. (1977) *Ratsionalizatsiya perezovok gruzov na zheleznnykh dorogakh* [Improvement of railroad goods transportation]. Moscow: Transport (in Russian).
- Levin D.Yu. (2010) Modelirovanie protsessov perezovki [Modeling of transportation processes]. *World of Transport and Transportation*, vol. 8, no. 5 (33), pp. 48–55 (in Russian).
- Rubtsov A.O., Tarasov A.S. (2009) Modelirovanie zheleznodorozhnykh perezovok na territorii Rossii [Modeling of railway transport in the territory of Russia]. *Proceedings of the Institute of System Analysis of Russian Academy of Sciences*, no. 46, pp. 274–278 (in Russian).
- de Jong G., Gunn H.F., Walker W. (2004) National and international freight transport models: an overview and ideas for further development. *Transport Reviews*, vol. 24, no. 1, pp. 103–124.
- Yamada T., Russ B.F., Castro J., Taniguchi E. (2009) Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications. *Transportation Science*, vol. 43, no. 2, pp. 129–143.
- Khachatryan N.K., Akopov A.S. (2017) Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution. *Business Informatics*, no. 1 (39), pp. 25–35.
- Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2013) Ob odnom klasse dinamicheskikh modeley gruzoperezovok [On one class of dynamic transportation models]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 53, no. 10, pp. 1649–1667 (in Russian).
- Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2006) Traveling wave type solutions in dynamic transport models. *Functional Differential Equations*, vol. 13, no. 2, pp. 125–155.