Исследование динамики емкостей перегонов в модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями

Н.К. Хачатрян

E-mail: nerses@cemi.rssi.ru

Г.Л. Бекларян

E-mail: glbeklaryan@gmail.com

С.В. Борисова

E-mail: boriss@cemi.rssi.ru

Ф.А. Белоусов

E-mail: sky_tt@list.ru

Центральный экономико-математический институт, Российская академия наук
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47

Аннотация

В статье рассматривается модель организации железнодорожных грузоперевозок на протяженном участке пути между двумя узловыми станциями, соединенными большим количеством промежуточных станций. Между двумя произвольными соседними станциями расположен перегон для временного хранения части грузов. Движение грузопотока осуществляется в одном направлении. Для обеспечения бесперебойного движения грузопотока используются две технологии, единые для всех станций. Первая технология основана на процедуре взаимодействия станции как с соседними станциями, так и с соседними перегонами. Вторая технология использует технические возможности самой станции и основана на взаимодействии станции с соседними перегонами. Для грузоперевозок используется простая система контроля, предусматривающая измерение объемов перевозимых грузов на соседних станциях с единым лагом времени.

Работа посвящена описанию и исследованию динамики количества путей, задействованных на перегонах. Для этого формируется система дифференциальных уравнений, правые части которых являются функциями переменных, описывающих динамику количества путей, задействованных на станциях. Отправной точкой для данного исследования являются полученные ранее результаты исследования динамики количества путей, задействованных на станциях (краткое описание этих результатов приведено во Введении). Приведено описание динамики числа путей, задействованных на перегонах. Исследованы возможные варианты этой динамики (рост числа задействованных путей на одних перегонах и падение на других) и их зависимость от параметров модели. Также исследована зависимость скорости изменения числа задействованных путей на перегонах от параметров модели. Выявлен параметр, управляя которым, можно обеспечить сколь угодно малую скорость роста (падения) числа путей, задействованных на всех перегонах.

Ключевые слова: станция; перегон; организация грузоперевозок; математическая модель; дифференциальные уравнения; динамика; численная реализация.

Цитирование: Хачатрян Н.К., Бекларян Г.Л., Борисова С.В., Белоусов Ф.А. Исследование динамики емкостей перегонов в модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями // Бизнес-информатика. 2019. Т. 13. № 1. С. 59–70.

DOI: 10.17323/1998-0663.2019.1.59.70

Введение

Транспорт является одной из главных отраслей любого государства и выполняет связующую, коммуникационную и обеспечивающую функции. Для правильной организации движения в транспортной сети используются системы управления. Их алгоритмы работы основаны на математических моделях, одной из основных функций которых является моделирование транспортных потоков. Математическому моделированию транспортных потоков посвящено большое количество публикаций. В работах [1–3] описаны «модели-аналоги», в которых движение транспортного средства уподобляется какому-либо физическому потоку (гидро и газодинамические модели). Существует большое количество моделей, предназначенных для оптимизации функционирования транспортных сетей [4–7]. В этом классе моделей решаются задачи оптимизации маршрутов перевозок, выработки оптимальной конфигурации транспортной сети и др. Один из подходов к моделированию и исследованию транспортных потоков основан на теории конкурентного бескоалиционного равновесия [8–11]. Он позволяет описать довольно адекватный механизм функционирования автомобильных улично-дорожных сетей. Отметим также подход, связанный с применением имитационного моделирования и клеточных автоматов, описанный в работах [12–15]. В последнее время активно развивается альтернативная теория транспортных потоков, названная *теорией трех фаз* (классические теории рассматривают две фазы: *свободный поток* и *плотный поток*) [16–20]. Эта теория может предсказать и объяснить эмпирические свойства перехода к плотному потоку и результирующих пространственно-временных структур в транспортном потоке.

Ряд публикаций посвящен моделированию железнодорожных перевозок и соответствующих транспортных потоков [21–27]. В частности, в работах [24–27] исследуется модель организации железнодорожных грузоперевозок между двумя узловыми станциями, соединенными железнодорожной линией, которая содержит определенное количество про-

межуточных станций. Предполагается, что между произвольными соседними станциями существует межстанционный перегон, где временно может храниться часть грузов (в специальной зоне хранения). Движение грузов осуществляется в одном направлении, схема грузопотока представлена на *рисунке 1*.

На данном рисунке кружками обозначены станции, а квадратами – перегоны. Как видно из рисунка, на произвольную промежуточную станцию груз может поступить как с предыдущей станции, так и с перегона, после чего груз может быть отправлен либо на следующую станцию, либо на перегон. Пусть количество промежуточных станций равно m . Обозначив через 0 и $m + 1$ соответственно номера начальной и конечной узловых станций, получим следующее множество номеров станций: $\{0, 1, \dots, m, m + 1\}$. Каждая станция в произвольный момент времени характеризуется количеством задействованных путей. Обозначим через $z_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, m + 1$ число путей, задействованных на i -й станции в момент времени t . Максимальное количество задействованных путей на станциях, при котором функционирует режим наращивания числа путей за счет грузов с перегона, обозначим через Δ . Если число задействованных путей превышает максимальное значение, то часть грузов временно отправляется в зону хранения.

Организация грузопотока осуществляется с помощью двух технологий.

Первая технология основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Здесь применяется следующее правило: произвольная станция может отправить груз на следующую станцию, если количество задействованных путей на ней больше, чем

Рис. 1. Схема грузопотока железнодорожного транспорта

на следующей станции. При этом интенсивность отправки грузов пропорциональна разности чисел задействованных путей на этих станциях. Заметим, что отправка грузов с произвольной станции (кроме последней) с некоторой интенсивностью равносильна приему грузов с той же интенсивностью на следующей станции. Таким образом, каждая станция с номером i ($1 \leq i \leq m$) может принять груз с предыдущей станции с интенсивностью, равной $\alpha(z_{i-1} - z_i)$, если $z_{i-1} > z_i$ и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью, равной $\alpha(z_i - z_{i+1})$, если $z_i > z_{i+1}$. При нарушении первого из условий станция с номером i отправляет груз на перегонный путь с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, а при нарушении второго — принимает груз с перегонного пути с интенсивностью $\alpha(z_{i+1} - z_i)$. Начальная узловая станция ($i = 0$) принимает груз с интенсивностью $\psi_1(t)$ и отправляет его на следующую станцию с интенсивностью $\alpha(z_0 - z_1)$ если $z_0 > z_1$. В противном случае начальная узловая станция дополнительно принимает груз с интенсивностью $\alpha(z_1 - z_0)$. Конечная узловая станция ($i = m + 1$) принимает груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m+1})$, если $z_m > z_{m+1}$, и распределяет его с интенсивностью $\psi_2(t)$. Если $z_m < z_{m+1}$, то конечная станция дополнительно распределяет груз с интенсивностью $\alpha(z_{m+1} - z_m)$.

Вторая технология призвана использовать инфраструктурные возможности станций и обеспечить бесперебойное движение грузов. Она основана на процедуре взаимодействия станции с соседними перегонными путями, расположенными по разные стороны от нее. Вторая технология для всех станций, кроме начальной, позволяет как увеличить число задействованных путей (если оно не превышает Δ), так и уменьшать его (если оно превышает Δ). Функция $\varphi(\cdot)$, задающая скорость изменения числа задействованных путей в рамках данной технологии, обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, 0]$ она тождественно равна нулю, на интервале $(0, x_{opt})$ является возрастающей, в точке x_{opt} принимает максимальное значение, на полупрямой $(x_{opt}, +\infty)$ является убывающей, в точке Δ принимает нулевое значение, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейной. Для начальной узловой станции ($i = 0$) вторая технология используется только для разгрузки. Функция $\varphi_0(\cdot)$, задающая скорость изменения числа задействованных путей на данной станции в рамках данной технологии, обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, \Delta]$ она тождественно равна нулю, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей.

Для грузоперевозок используется простая система контроля. Она заключается в том, что количество задействованных путей на произвольной станции должно совпадать с количеством задействованных путей на следующей станции, с лагом времени, который является единым для всех станций.

Таким образом, динамика чисел задействованных путей на станциях задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m+1}(t) &= \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \\ t &\in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (3)$$

а система контроля — нелокальными линейными ограничениями

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad t \in [0, +\infty). \quad (4)$$

Константу τ будем называть характеристикой системы контроля.

Определение 1. Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется решением типа бегущей волны с характеристикой τ (солитонным решением), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (1) — (3) и нелокальным ограничениям (4).

Класс солитонных решений является чрезвычайно узким. Это приводит к необходимости правильного расширения класса солитонных решений до класса солитонных квазирешений. В работах [24–27] предложены два способа такого расширения. Один тип расширения предполагает допущение разрывных солитонных решений (назовем их солитонными квазирешениями первого типа).

Определение 2. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется солитонным квазирешением первого типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (1) — (3) и нелокальным ограничениям (4), с возможными разрывами в точках $k\tau$ $k = 1, 2, \dots$.

Доказано существование $\bar{\tau} > 0$ такого, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$, $\bar{i} \in \{0, 1, \dots, m, m + 1\}$ система (1) — (4) с фиксированным начальным значением $z_{\bar{i}}(\bar{t})$ в начальный момент времени $\bar{t}$ имеет единственное «квазирешение» первого типа [24].

Определение 3. Солитонное квазирешение первого типа с характеристикой τ называется ε -солитонным квазирешением первого типа с характеристикой τ , если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \text{ для всех } k = 1, 2, \dots$$

Доказано существование $\bar{\tau} > 0$ такого, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$ существует ε -солитонное квазирешение первого типа с характеристикой τ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$ [24].

Второй тип расширения солитонных решений допускает ослабление системы контроля (выполнение нелокальных ограничений (4) с некоторой погрешностью). Приведем точную формулировку квазирешений данного типа.

Определение 4. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется ε -солитонным квазирешением второго типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (1) – (3) и выполняется условие

$$|z_i(t) - z_{i+1}(t + \tau)| < \varepsilon \\ i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty).$$

Доказано, что решения системы дифференциальных уравнений (1) – (3) являются ограниченными при ограниченности функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ [27].

В работе [27] с помощью компьютерной реализации были исследованы квазирешения второго типа для периодических функций $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma > 0$, а также функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$, определенных следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ ax(\Delta - x), a > 0 & \text{при } x \in [0, \Delta] \\ -c(x - \Delta), c > 0 & \text{при } x \in (\Delta, +\infty), \end{cases} \\ \varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \Delta \\ -c_0(x - \Delta), c_0 > 0 & \text{при } x \in (\Delta, +\infty). \end{cases}$$

Для этого было исследовано множество всех решений системы дифференциальных уравнений (1) – (3). Согласно результатам численных экспериментов, начиная с некоторого момента времени $\bar{t} > 0$ решения системы (1) – (3) начинают колебаться в некоторой окрестности значения Δ , причем компоненты решения удовлетворяют условию $z_0(t) > z_1(t) > \dots > z_m(t) > z_{m+1}(t)$ для любого $t \in [\bar{t}, +\infty)$.

Более того, существует целое число $0 \leq \bar{m} < m + 1$

такое, что

$$z_i(t) > \Delta, \text{ для } 0 \leq i \leq \bar{m}, t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (5)$$

$$z_i(t) < \Delta, \text{ для } \bar{m} < i \leq m + 1, t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (6)$$

Численные эксперименты показали, что само значение $\bar{m}$ зависит от параметров c_0 , c и a , но не зависит от параметра α . Зависимость от параметров c_0 и c – невозрастающая: с увеличением параметра c_0 значение $\bar{m}$ уменьшается до $\bar{m} = 0$, а с увеличением параметра c – до $\bar{m} = 1$. Зависимость от параметра a – неубывающая: с его увеличением значение $\bar{m}$ увеличивается до $\bar{m} = m$.

Исследована зависимость решений системы дифференциальных уравнений (1) – (3) от параметра α . Показано, что для произвольной характеристики $\tau > 0$, увеличивая параметр α , можно сделать сколь угодно малой погрешность в выполнении нелокальных ограничений (4).

В проведенных исследованиях предполагалось, что емкости перегонов (число задействованных путей на них) являются неограниченными, вследствие чего не проводилось наблюдение за их динамикой. Однако в действительности данное предположение является нереалистичным: по крайней мере, в течение продолжительного периода времени емкости перегонов должны быть ограничены в разумных пределах. Данная работа посвящена исследованию динамики емкостей перегонов и ее зависимости от параметров модели.

1. Описание динамики емкостей перегонов

Исследуем динамику емкостей перегонов в рамках модели, описанной во Введении. Начнем с их нумерации. Перегон, расположенный между станциями с номерами i и $i + 1$ обозначим номером i . Таким образом, мы получим следующее множество номеров перегонов: $\{0, 1, \dots, m\}$. Количество задействованных путей на i -м перегоне в момент времени t обозначим через $y_i(t)$. Определим, с какой интенсивностью грузы поступают на перегоны и с какой интенсивностью покидают их. Заметим, что грузы могут поступать на перегоны и отправляться из них в рамках как первой, так и второй технологии.

В рамках первой технологии на перегон с номером i ($1 \leq i \leq m - 1$) груз поступает со станции с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, если $z_i > z_{i-1}$, и отправляется на станцию с номером $i + 1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+2} - z_{i+1})$, если $z_{i+2} > z_{i+1}$. На на-

чальный перегон ($i = 0$) в рамках первой технологии груз не поступает. Наконец, на конечный перегон ($i = m$) в рамках этой же технологии груз поступает со станции с номером $i = m$ с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m-1})$, если $z_m > z_{m-1}$. С конечного перегона в рамках данной технологии груз не отправляется.

В рамках второй технологии на перегон с номером i ($1 \leq i \leq m - 1$) груз поступает со станции с номером i с интенсивностью $-\varphi(z_i)$, если число задействованных путей на станции с номером i превышает значение Δ , и отправляется на станцию с номером $i + 1$ с интенсивностью $\varphi(z_{i+1})$, если число задействованных путей на станции с номером $i + 1$ меньше значения Δ (станция с номером $i + 1$ принимает груз с перегона). На начальный перегон ($i = 0$) в рамках второй технологии груз поступает с начальной узловой станции с интенсивностью $-\varphi_0(z_0)$, если число задействованных путей на указанной станции превышает Δ , и отправляется на станцию с номером $i = 1$ с интенсивностью $\varphi(z_1)$, если число задействованных путей на станции с номером $i = 1$ меньше Δ . Наконец, на конечный перегон $i = m$ в рамках второй технологии груз поступает с интенсивностью $-\varphi(z_m)$ со станции с номером $i = m$ и отправляется на конечную узловую станцию ($i = m + 1$) с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если число задействованных путей на конечной узловой станции меньше Δ .

Таким образом, динамика числа задействованных путей на перегонах описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}_0(t) = -\alpha(z_2 - z_1) \text{sign}(z_2 - z_1) - \varphi(z_0) \text{sign}(z_0 - \Delta) - \varphi(z_1) \text{sign}(\Delta - z_1), \quad t \in [0, +\infty), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & \alpha(z_i - z_{i-1}) \text{sign}(z_i - z_{i-1}) - \\ & -\alpha(z_{i+2} - z_{i+1}) \text{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) - \varphi(z_i) \text{sign}(z_i - \Delta) - \\ & -\varphi(z_{i+1}) \text{sign}(\Delta - z_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) = & \alpha(z_m - z_{m-1}) \text{sign}(z_m - z_{m-1}) - \\ & -\varphi(z_m) \text{sign}(z_m - \Delta) - \varphi(z_{m+1}) \text{sign}(\Delta - z_{m+1}), \quad (9) \\ & t \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

$$\text{где } \text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Исследуем систему (7) – (9) в предположении, что в правых частях уравнений участвуют компоненты квазирешений второго типа.

Используя неравенства (5) – (6) и определения функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$, преобразуем уравнения (7) – (9). В частности, из неравенств (5) – (6) следует, что, начиная с момента $\bar{t}$, в правой части уравнений (7) – (9) все слагаемые вида $\alpha(z_{k+1} - z_k) \text{sign}(z_{k+1} - z_k)$ будут равны нулю. В зависимости от значения $\bar{m}$ рассмотрим несколько случаев.

Первый случай: $\bar{m} = 0$. Это означает, что $z_0(t) > \Delta$, $z_i(t) < \Delta$, $i = 1, \dots, m + 1$ для всех $t \geq \bar{t}$, а уравнения (7) – (9) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) = & c_0(z_0 - \Delta) - \alpha z_1(\Delta - z_1), \\ & z_0 > \Delta, \quad z_1 < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & -\alpha z_{i+1}(\Delta - z_{i+1}), \\ & z_{i+1} < \Delta, \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \end{aligned} \quad (11)$$

Второй случай: $1 < \bar{m} < m$

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta), \quad z_0 > \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (12)$$

$$\dot{y}_i(t) = c(z_i - \Delta), \quad z_i > \Delta, \quad i = 1, \dots, \bar{m} - 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{\bar{m}}(t) = & c(z_{\bar{m}} - \Delta) - \alpha z_{\bar{m}+1}(\Delta - z_{\bar{m}+1}), \\ & z_{\bar{m}} > \Delta, \quad z_{\bar{m}+1} < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & -\alpha z_{i+1}(\Delta - z_{i+1}), \\ & z_{i+1} < \Delta, \quad i = \bar{m} + 1, \dots, m, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \end{aligned} \quad (15)$$

Третий случай: $\bar{m} = m$

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta), \quad z_0 > \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (16)$$

$$\dot{y}_i(t) = c(z_i - \Delta), \quad z_i > \Delta, \quad i = 1, \dots, \bar{m} - 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) = & c(z_m - \Delta) - \alpha z_{m+1}(\Delta - z_{m+1}), \\ & z_m > \Delta, \quad z_{m+1} < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \end{aligned} \quad (18)$$

Непосредственно из (10) – (18) следует, что во всех трех случаях правые части всех уравнений (за исключением, быть может, уравнения с номером $\bar{m}$) либо положительны, либо отрицательны. Численные эксперименты показали, что в первом случае ($\bar{m} = 0$) правая часть уравнения с номером $\bar{m} = 0$ положительна. Это связано с тем, что данный случай имеет место, если значение параметра c_0 существенно больше значения параметра a . В третьем случае ($\bar{m} = m$) правая часть уравнения с номером $\bar{m}$ отрицательна. Это связано с тем, что данный случай имеет место, если значение параметра c существенно меньше значения параметра a .

Таким образом, в первом случае правая часть уравнения с номером $\bar{m} = 0$ положительна, а правые части остальных уравнений отрицательны. Следовательно, в данном случае число задействованных путей на перегоне с номером $\bar{m} = 0$ будет неограниченно возрастать, а число задействованных путей на остальных перегонах — неограниченно убывать.

В третьем случае правая часть уравнения с номером $\bar{m} = t$ отрицательна, а правые части остальных уравнений положительны. Соответственно, в данном случае число задействованных путей на перегоне с номером $\bar{m} = t$ будет неограниченно убывать, а число задействованных путей на остальных перегонах — неограниченно возрастать.

Во втором случае правые части уравнений с номерами меньше $\bar{m}$ положительны, правые части уравнений с номерами больше $\bar{m}$ отрицательны. Правая часть уравнения с номером $\bar{m}$ может быть как положительной, так и отрицательной, а при определенных комбинациях параметров может оказаться равной нулю. Следовательно, в этом случае только на одном перегоне число задействованных путей может не изменяться со временем. Число задействованных путей на остальных перегонах либо будет неограниченно возрастать, либо неограниченно убывать. Например, на рисунке 2 приведена динамика числа задействованных путей на перегонах в случае постоянных функций, описывающих интенсивность подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции, т.е. $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$, $d > 0$ (случай 2, уравнения (12) — (15)). Количество станций равно 10, соответственно, количество перегонов равно 9 ($y_0, y_1, \dots, y_8$ — число задействованных путей на этих перегонах). Значение Δ , определяющее

Рис. 2. Динамика числа задействованных путей на перегонах с постоянными функциями $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$

пропускную способность станций, равно 10, а параметры имеют следующие значения: $\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Многочисленные эксперименты показали, что все выводы относительно динамики емкостей перегонов, которые будут приведены ниже, справедливы для любого другого количества станций (перегонов) и значения Δ .

Для периодических функций $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma > 0$ динамика числа задействованных путей на перегонах принципиально не меняется. Например, на рисунке 3 приведена динамика при следующих значениях параметров: $\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$, $\gamma = 3$.

Рис. 3. Динамика чисел задействованных путей на перегонах с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

В связи с этим дальнейшее исследование будем проводить для случая с постоянными и равными функциями $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$.

2. Зависимость скорости роста и падения числа задействованных путей на перегонах от параметров модели

Исследуем зависимость скорости роста и падения числа задействованных путей на перегонах от параметров модели. Начнем с параметра c_0 . Напомним, что данный параметр определяет интенсивность отправки грузов с начальной узловой станции на нулевой перегон. Пусть $\bar{m} \geq 1$ (уравнения (12) — (18)). Как показывают численные эксперименты, увеличение данного параметра приводит к увеличению скорости роста числа задействованных путей на нулевом перегоне, уменьшению скорости роста числа задействованных путей на перегонах с номерами $1, \dots, \bar{m}$, и увеличению скорости падения на следующих перегонах. При этом как уменьше-

ние скорости роста числа задействованных путей на перегонах с номерами $1, \dots, \bar{m}$, так и увеличение скорости падения на следующих перегонах ослабевает при увеличении номера перегона. Данную тенденцию можно увидеть на *рисунке 4*, где значение параметра c_0 увеличено до двух, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10, a = 0.1, c_0 = 2, c = 1, d = 3$).

Напомним, что само значение $\bar{m}$ зависит от параметра c_0 : при его увеличении значение $\bar{m}$ уменьшается до $\bar{m} = 0$. Поэтому по мере увеличения данного параметра рост числа задействованных путей на всех перегонах, за исключением начального, сменяется на падение. Данную тенденцию можно увидеть на *рисунке 5* (уравнения (10) – (11)). На нем значение параметра c_0 увеличено до 60 при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10, a = 0.1, c_0 = 60, c = 1, d = 3$).

Рис. 4. Динамика числа задействованных путей на перегонах при увеличении значения параметра c_0 (двукратное увеличение)

Рис. 5. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра c_0 (многократное увеличение)

Перейдем к исследованию зависимости роста (падения) числа задействованных путей на перегонах от параметра c . Данный параметр определяет интенсивность отправки грузов с произвольной промежуточной станции с номером $i = 1, \dots, m$ на перегон. Отправка грузов на перегон осуществляется, если число задействованных путей на станции больше значения Δ , определяющего пропускную способность станции. Согласно (5), это условие выполняется на станциях с номерами $i = 0, \dots, \bar{m}$. Таким образом, станция с номером $i = 0, \dots, \bar{m}$ отправляет груз на перегон с номером $i = 0, \dots, \bar{m}$. Напомним, что само значение $\bar{m}$ зависит от параметра c : с его увеличением значение $\bar{m}$ уменьшается до $\bar{m} = 1$. Поэтому небольшое увеличение параметра c , не приводящее к уменьшению значения $\bar{m}$, приводит к увеличению скорости роста числа задействованных путей на перегонах с номерами $i = 1, \dots, \bar{m}$ и уменьшению роста числа задействованных путей на перегоне с номером $i = 0$. На перегонах с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$ наблюдается увеличение скорости падения числа задействованных путей. При этом как увеличение скорости роста числа задействованных путей на перегонах с номерами $i = 1, \dots, \bar{m}$, так и увеличение скорости падения числа задействованных путей на перегонах с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$ ослабевает при увеличении номера перегона.

Если увеличение параметра c приводит к уменьшению значения $\bar{m}$, то наблюдается следующая тенденция: по мере увеличения параметра c постепенно на перегонах, на которых происходило увеличение скорости роста числа задействованных путей, происходит уменьшение скорости роста числа задействованных путей вплоть до дальнейшего падения, за исключением перегонов с номерами $i = 0, 1$ (*рисунок 6*). Таким образом, начиная с некоторого значения параметра c , на всех перегонах кроме нулевого и первого, происходит снижение числа задействованных путей. На нулевом и первом перегонах происходит рост числа задействованных путей, причем скорость роста на первом увеличивается (*рисунок 7*).

На *рисунке 6* значение параметра c увеличено до двух ($\alpha = 10, a = 0.1, c_0 = 1, c = 2, d = 3$), а на *рисунке 7* — до 60, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10, a = 0.1, c_0 = 1, c = 60, d = 3$).

Перейдем к исследованию зависимости роста (падения) числа задействованных путей на перегонах от параметра a . Напомним, что данный параметр определяет интенсивность приема грузов по второй технологии (с перегона),

Рис. 6. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра c (двукратное увеличение)

причем данная технология применяется, если число задействованных путей на станции меньше значения Δ . Согласно (6), это условие выполняется на станциях с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m + 1$. Как было указано выше, в рамках второй технологии станция с номером $i + 1$ принимает груз с перегона с номером i . Напомним, что само значение $\bar{m}$ зависит от параметра a : с его увеличением значение $\bar{m}$ увеличивается до $\bar{m} = m$. Поэтому небольшое увеличение параметра a , не приводящее к увеличению значения $\bar{m}$, приводит к увеличению скорости падения на перегонах с номерами $i = \bar{m}, \dots, m$. На перегонах с номерами $i = 0, \dots, \bar{m} - 1$ наблюдается увеличение скорости роста числа задействованных путей. При этом как увеличение скорости падения на перегонах с номерами $i = \bar{m}, \dots, m$ так и увеличение скорости

Рис. 7. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра c (многократное увеличение)

роста числа задействованных путей на предыдущих перегонах ослабевает при уменьшении номера перегона. Если же увеличение параметра a приводит к увеличению значения $\bar{m}$, то наблюдается следующая тенденция: по мере увеличения параметра a постепенно на перегонах, на которых происходило увеличение скорости падения числа задействованных путей, происходит уменьшение скорости падения числа задействованных путей вплоть до дальнейшего роста, за исключением последнего перегона с номером $i = m$ (рисунок 8). Таким образом, начиная с некоторого значения параметра a , на всех перегонах, кроме последнего, происходит рост числа задействованных путей. На последнем перегоне происходит падение числа задействованных путей, причем скорость падения увеличивается (рисунок 9).

Рис. 8. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра a (пятикратное увеличение)

Рис. 9. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра a (многократное увеличение)

На рисунке 8 значение параметра α увеличено до 0.5 ($\alpha = 10$, $a = 0.5$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$), а на рисунке 9 – до 10, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10$, $a = 10$, $c_0 = 1$, $c = 60$, $d = 3$).

Наконец, исследуем зависимость роста (падения) объема перегонных путей от параметра α . Напомним, что изменение данного параметра не изменяет значение $\bar{m}$. Согласно исследованию, проведенному в [27], начиная с момента времени $\bar{t}$, увеличение параметра α приводит к уменьшению как разностей $(z_i - \Delta)$, $i = 0, \dots, \bar{m}$ так и $(\Delta - z_i)$, $i = \bar{m} + 1, \dots, m$. Таким образом, увеличение параметра α приводит как к уменьшению скорости роста на перегонах с номерами $i = 0, \dots, \bar{m} - 1$ так и к уменьшению скорости падения числа задействованных путей на перегонах с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$. Такое же воздействие оказывает увеличение данного параметра и на число задействованных путей на перегоне с номером $i = \bar{m}$, лишь с той разницей, что число задействованных путей на данном перегоне может как расти, так и падать, либо не меняться. Например, на рисунке 10 приведена динамика при следующих значениях параметров $\alpha = 30$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$.

Таким образом, увеличение параметра α может уменьшить как рост, так и падение числа задействованных путей на всех перегонах.

Заключение

Данная статья посвящена исследованию динамики емкости перегонов в модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями. Ранее в работах [24–27] была исследована динамика емкости станций (число задействованных путей на них). В проведенных исследованиях предполагалось, что

Рис. 10. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра α

емкости перегонов неограниченны, вследствие чего наблюдение за их динамикой не проводилось. В данной работе приведена и исследована система дифференциальных уравнений, описывающих число задействованных путей на перегонах. Как оказалось, начиная с некоторого момента времени, число задействованных путей на всех перегонах, кроме одного, либо возрастает, либо убывает. При этом количество перегонов как с возрастающим, так и с убывающим числом задействованных путей зависит от ряда параметров модели. Исследована зависимость скорости роста и падения числа задействованных путей от параметров модели. Выявлен параметр, увеличивая который, можно добиться одновременного уменьшения как скорости роста, так и скорости падения числа задействованных путей на всех перегонах. Этот параметр характеризует интенсивность взаимодействия соседних станций в рамках первой технологии организации грузопотока. ■

Литература

1. Inose H., Hamada T. Road traffic control. Tokyo: University of Tokyo Press, 1975.
2. Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чубарова Н.Г. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 2. С. 118–126.
3. Моделирование транспортных потоков – Актуальные проблемы и пути их решения / Я.А. Холодов и [др.] // Труды Московского физико-технического института МФТИ. 2010. Т. 2. № 4 (8). С. 152–162.
4. Галабурда В.Г. Совершенствование технологии перевозок и увеличение пропускной способности железных дорог. М.: МИИТ, 1983.
5. Галабурда В.Г. Оптимальное планирование грузопотоков. М.: Транспорт, 1985.
6. Авен О.И., Ловецкий С.Е., Моисеенко Г.Е. Оптимизация транспортных потоков. М.: Наука, 1985.
7. Васильева Е.М., Игудин Р.В., Лившиц В.Н. Оптимизация планирования и управления транспортными системами. М.: Транспорт, 1987.
8. Shvetsov V.I. Algorithms for distributing traffic flows // Automation and Remote Control. 2009. Vol. 70. No 10. P. 1728–1736.
9. Leventhal T., Nemhauser G.L., Trotter L. A column generation algorithm for optimal traffic assignment // Transportation Science. 1973. No 7. P. 168–176.
10. Lo H.K., Chen A. Traffic equilibrium problem with route-specific costs: formulation and algorithms // Transportation Research, Part B. 2000. Vol. 34. No 6. P. 493–513.

11. Bar-Gera H. Origin-based algorithm for the traffic assignment problem // *Transportation Science*. 2002. Vol. 36. No 4. P. 398–417.
12. Yamada T., Russ B.F., Castro J., Taniguchi E. Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications // *Transportation Science*. 2009. Vol. 43. No 2. P. 129–143.
13. Cremer M., Ludwig J. A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations // *Mathematics and Computers in Simulation*. 1986. No 28. P. 297–303.
14. Blank M.L. Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow. *Russian Mathematical Surveys*. 2000. Vol. 55. No 3. P. 562–563.
15. Buslaev A.P., Gasnikov A.V., Yashina M.V. Selected mathematical problems of traffic flow theory // *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. Vol. 89. No 3. P. 409–432.
16. Daganzo C.F. *Fundamentals of transportation and traffic operations*. N.Y.: Elsevier Science, 1997.
17. Kerner B.S. Congested traffic flow: Observations and theory // *Transportation Research Record*. 1999. Vol. 1678. P. 160–167.
18. Kerner B.S. Theory of congested traffic flow: Self-organization without bottlenecks // *Transportation and Traffic Theory / A. Ceder (ed.)*. London: Elsevier Science, 1999. P. 147–171.
19. Kerner B.S. *Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three-phase traffic theory*. Springer, 2009.
20. Munoz J.C., Daganzo C.F. Moving bottlenecks – a theory grounded on experimental observation // *Transportation and Traffic Theory in the 21st Century: Proceedings of the 15th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*. Adelaide, Australia, 16–18 July 2002. P. 441–461.
21. Рубцов А.О., Тарасов А.С. Моделирование железнодорожных перевозок на территории России // *Труды Института системного анализа Российской академии наук*. 2009. № 46. С. 274–278.
22. Gainanov D.N., Konygin A.V., Rasskazova V.A. Modelling railway freight traffic using the methods of graph theory and combinatorial optimization // *Automation and Remote Control*. 2016. Vol. 77. No 11. P. 1928–1943.
23. Левин Д.Ю. Моделирование процессов перевозки // *Мир транспорта*. 2010. Т. 8. № 5 (33). С. 48–55.
24. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // *Functional Differential Equations*. 2006. Vol. 13. No 12. P. 125–155.
25. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. On one class of dynamic transportation models // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013. Vol. 53. No 10. P. 1466–1482.
26. Khachatryan N.K., Akopov A.S. Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution // *Business Informatics*. 2017. No 1 (39). P. 25–35.
27. Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A. About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation // *Business Informatics*. 2018. No 1 (43). P. 61–70.

Об авторах

Хачатрян Нерсес Карленович

кандидат физико-математических наук;
ведущий научный сотрудник, лаборатория динамических моделей экономики и оптимизации,
Центральный экономико-математический институт, Российская академия наук,
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47;
E-mail: nerses@cemi.rssi.ru

Бекларян Гаянэ Леоновна

кандидат экономических наук;
старший научный сотрудник, лаборатория компьютерного моделирования социально-экономических процессов,
Центральный экономико-математический институт, Российская академия наук,
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47;
E-mail: glbeklaryan@gmail.com

Борисова Светлана Валерьевна

кандидат физико-математических наук;
старший научный сотрудник, лаборатория динамических моделей экономики и оптимизации,
Центральный экономико-математический институт, Российская академия наук,
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47;
E-mail: boriss@cemi.rssi.ru

Белюсов Федор Анатольевич

научный сотрудник, лаборатория динамических моделей экономики и оптимизации,
Центральный экономико-математический институт, Российская академия наук,
Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47;
E-mail: sky_tt@list.ru

Research into the dynamics of railway track capacities in a model for organizing cargo transportation between two node stations

Nerses K. Khachatryan

E-mail: nerses@cemi.rssi.ru

Gayane L. Beklaryan

E-mail: glbeklaryan@gmail.com

Svetlana V. Borisova

E-mail: boriss@cemi.rssi.ru

Fedor A. Belousov

E-mail: sky_tt@list.ru

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences
Address: 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow 117418, Russia

Abstract

The article deals with a model for organizing railway transportation on a long stretch of road between two node stations connected by a large number of intermediate stations. Between two arbitrary neighboring stations, there is a railway track for temporary storage of cargo. The movement of cargo is carried out in one direction. To ensure the smooth movement of cargo, two technologies are used which are common for all stations. The first technology is based on the procedure of interaction of a station with both neighboring stations and adjacent railway tracks. The second technology uses the technical capabilities of the station itself and is based on the interaction of the station with neighboring railway tracks. For cargo transportation, a simple control system is used which provides for measuring the volume of transported goods at neighboring stations with a single time lag.

This work is devoted to describing and studying the dynamics of the number of roads involved in the railway tracks. For this purpose, a system of differential equations is formed, the right parts of which are functions of variables describing the dynamics of the number of roads involved in the stations. The starting point for this study is previously obtained results from studying the dynamics of the number of tracks involved in the stations (a brief description of these results is given in the Introduction). What follows is the description of the dynamics of the number of roads involved in the railway tracks. Possible variants of the dynamics (growth of the number of the roads involved on one railway tracks and falling on others) and their dependence on parameters of the model are investigated. We also study the dependence of the rate of change in the number of involved roads on the railway tracks on the model parameters. We then find the parameter of control by which it is possible to provide arbitrarily small speed of growth (fall) of the number of the roads involved on all railway tracks.

Key words: station; railway track; organization of cargo transportation; mathematical model; differential equations; dynamics; numerical realization.

Citation: Khachatryan N.K., Beklaryan G.L., Borisova S.V., Belousov F.A. (2019) Research into the dynamics of railway track capacities in a model for organizing cargo transportation between two node stations. *Business Informatics*, vol. 13, no 1, pp. 59–70.

DOI: 10.17323/1998-0663.2019.1.59.70

References

1. Inose H., Hamada T. (1975) *Road traffic control*. Tokyo: University of Tokyo Press.
2. Sukhinova A.B., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Chubarova N.G. (2009) Two-dimensional macroscopic model of traffic flows. *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 21, no 2, pp. 118–126 (in Russian).
3. Kholodov Ya.A., Kholodov A.S., Gasnikov A.V., Morozov I.I., Tarasov V.N. (2010) Modeling of traffic flows – Topical problems and ways to solve them. *Proceedings of MIPT*, vol. 2, no 4, pp. 152–162 (in Russian).

4. Galaburda V.G. (1983) *Improving transportation technologies and an increase in rail capacity*. Moscow: MIIT (in Russian).
5. Galaburda V.G. (1985) *Optimal planning of cargo flows*. Moscow: Transport (in Russian).
6. Aven O.I., Lovetsky S.E., Moiseenko G.E. (1985) *Optimization of transport flows*. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Vasilieva E.M., Igudin R.V., Livshits V.N. (1987) *Optimization of planning and management of transport systems*. Moscow: Transport (in Russian).
8. Shvetsov V.I. (2009) Algorithms for distributing traffic flows. *Automation and Remote Control*, vol. 70, no 10, pp. 1728–1736.
9. Leventhal T., Nemhauser G.L., Trotter L. (1973) A column generation algorithm for optimal traffic assignment. *Transportation Science*, no 7, pp. 168–176.
10. Lo H.K., Chen A. (2000) Traffic equilibrium problem with route-specific costs: formulation and algorithms. *Transportation Research, Part B*, vol. 34, no 6, pp. 493–513.
11. Bar-Gera H. (2002) Origin-based algorithm for the traffic assignment problem. *Transportation Science*, vol. 36, no 4, pp. 398–417.
12. Yamada T., Russ B.F., Castro J., Taniguchi E. (2009) Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications. *Transportation Science*, vol. 43, no 2, pp. 129–143.
13. Cremer M., Ludwig J. (1986) A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations. *Mathematics and Computers in Simulation*, no 28, pp. 297–303.
14. Blank M.L. (2000) Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow. *Russian Mathematical Surveys*, vol. 55, no 3, pp. 562–563.
15. Buslaev A.P., Gasnikov A.V., Yashina M.V. (2012) Selected mathematical problems of traffic flow theory. *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 89, no 3, pp. 409–432.
16. Daganzo C.F. (1997) *Fundamentals of transportation and traffic operations*. N.Y.: Elsevier Science.
17. Kerner B.S. (1999) Congested traffic flow: Observations and theory. *Transportation Research Record*, vol. 1678, pp. 160–167.
18. Kerner B.S. (1999) Theory of congested traffic flow: Self-organization without bottlenecks. *Transportation and Traffic Theory*. London: Elsevier Science, pp. 147–171.
19. Kerner B.S. (2009) *Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three-phase traffic theory*. Springer.
20. Munoz J.C., Daganzo C.F. (2002) Moving bottlenecks – a theory grounded on experimental observation // *Transportation and Traffic Theory in the 21st Century*. Proceedings of the 15th International Symposium on Transportation and Traffic Theory. Adelaide, Australia, 16–18 July 2002. P. 441–461.
21. Rubtsov A.O., Tarasov A.S. (2009) Modeling of railway transportation in Russia. *Proceedings of the Institute for Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences*, no 46, pp. 274–278 (in Russian).
22. Gainanov D.N., Konygin A.V., Rasskazova V.A. (2016) Modelling railway freight traffic using the methods of graph theory and combinatorial optimization. *Automation and Remote Control*, vol. 77, no 11, pp. 1928–1943.
23. Levin D.Yu. (2010) Modeling of transportation processes. *World of Transport and Transportation*, vol. 8, no 5, pp. 48–55 (in Russian).
24. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2006) Traveling wave type solutions in dynamic transport models. *Functional Differential Equations*, vol. 13, no 12, pp. 125–155.
25. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2013) On one class of dynamic transportation models. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 53, no 10, pp. 1466–1482.
26. Khachatryan N.K., Akopov A.S. (2017) Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution. *Business Informatics*, no 1, pp. 25–35.
27. Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A. (2018) About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation. *Business Informatics*, no 1, pp. 61–70.

About the authors

Nerses K. Khachatryan

Cand. Sci. (Phys.-Math.);

Leading Researcher, Laboratory of Dynamic Models of Economy and Optimization,
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow 117418, Russia;

E-mail: nerses@cemi.rssi.ru

Gayane L. Beklaryan

Cand. Sci. (Econ.);

Senior Researcher, Laboratory of Computer Modeling of Social and Economic Processes; Central Economics and Mathematics Institute,
Russian Academy of Sciences, 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow 117418, Russia;

E-mail: glbeklaryan@gmail.com

Svetlana V. Borisova

Cand. Sci. (Phys.-Math.);

Senior Researcher, Laboratory of Dynamic Models of Economy and Optimization, Central Economics and Mathematics Institute,
Russian Academy of Sciences, 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow 117418, Russia;

E-mail: boriss@cemi.rssi.ru

Fedor A. Belousov

Researcher, Laboratory of Dynamic Models of Economy and Optimization, Central Economics and Mathematics Institute,
Russian Academy of Sciences, 47, Nakhimovsky Prospect, Moscow 117418, Russia;

E-mail: sky_tt@list.ru