Определение ресурсов на восстановление системы вычислительных комплексов с элементами разной значимости

А.И. Марон [a]
E-mail: amaron@hse.ru

Т.К. Кравченко [a]
E-mail: tkravchenko@hse.ru

Т.Я. Шевгунов [a,b]
E-mail: tshevgunov@hse.ru

[a] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Адрес: 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

[b] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Адрес: 125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4

Аннотация

Большие распределенные информационные системы (БРИС) являются основой цифровизации технологических процессов в промышленности, на транспорте и в государственном управлении. Организация технического обслуживание таких систем и, в первую очередь, оперативное восстановление при отказах является актуальной темой научных исследований. БРИС состоят из вычислительных комплексов, в состав которых входят как основные элементы, так и вспомогательные. В современной литературе нет решения задачи определения ресурсов на техническое обслуживание (РТО) с учетом разной значимости элементов вычислительных комплексов. Впервые эта задача поставлена и решена в данной статье.

Для решения поставленной задачи применен метод динамики средних. Применение этого метода обусловлено тем, что он дает возможность получить систему дифференциальных уравнений для описания изменения во времени средней численности элементов, находящихся в различных состояниях в процессе эксплуатации БРИС.

Анализ решения полученной системы дифференциальных уравнений динамики средних позволил найти аналитические выражения для определения численности персонала и количества запасных элементов, при которых математическое ожидание численности исправных вычислительных комплексов достигает максимума. Результаты применимы при расчете РТО реальных БРИС. Они также могут служить в качестве начальных приближений к оптимальному объему РТО при необходимости учета выявленных особенностей эксплуатации конкретных систем с помощью имитационного моделирования. Численное решение полученной системы дифференциальных уравнений дает возможность определить среднее количество исправных элементов БРИС и в том случае, когда на обслуживание выделяется меньше ресурсов, чем это необходимо для достижения максимального значения среднего количества исправных элементов. Это позволяет решать задачи оптимизации ресурсов на обслуживание БРИС по экономическим критериям тогда, когда доход от функционирования вычислительных комплексов и затраты на оплату персонала сопоставимы.

Ключевые слова: распределенные информационные системы; техническое обслуживание; надежность; теория массового обслуживания; метод динамики средних.

Цитирование: Марон А.И., Кравченко Т.К., Шевгунов Т.Я. Определение ресурсов на восстановление системы вычислительных комплексов с элементами разной значимости // Бизнес-информатика. 2019. Т. 13. № 2. С. 18–28. DOI: 10.17323/1998-0663.2019.2.18.28

Введение

Большие распределенные информационные системы (БРИС) применяются для решения технологических задач в отраслях народного хозяйства и для осуществления функций государственного управления [1–6]. Примером такой системы является система отслеживания местоположения вагонов и контейнеров на железных дорогах России и стран СНГ, включающая в себя сеть центрального и периферийных вычислительных комплексов. Системы административного управления, созданные в рамках программы «Электронная Россия», также включают распределенные вычислительные комплексы [7]. К надежности таких систем предъявляются высокие требования, особенно если они обеспечивают процесс, являющийся основным для данной отрасли или сферы деятельности [8, 9]. Так, на железных дорогах России и стран СНГ эксплуатируются комплексные системы автоматизированного управления движением поездов, обеспечивающие выполнение рабочего графика движения поездов с учетом реальной пропускной способности различных участков [10, 11]. Надежность таких систем определяется не только показателями безотказности, но и характеристиками восстановления, которые, в свою очередь, зависят от того, насколько рационально оно организовано. Как показывает практика, для оперативного восстановления БРИС целесообразно создавать специализированные технические центры (СТЦ), которые централизованно обслуживают определенные регионы, используя в качестве основного метода восстановления агрегатные замены и последующий ремонт оборудования в стационарных условиях. Для выполнения возложенных на него задач СТЦ должен иметь адекватные трудовые и материальные ресурсы – ресурсы на техническое обслуживание (РТО). Если объем этих ресурсов будет мал, то в системе будет накапливаться неработоспособное оборудование, в результате чего эффективность системы будет, как минимум, существенно снижена. Если же объем ресурсов слишком велик, то это просто ненужные затраты.

Каждая из перечисленных выше систем состоит из вычислительных комплексов. Отказ вычислительного комплекса не приводит к отказу системы, но снижает эффективность ее функционирования. В работе [12] задача определения РТО решена для БРИС, состоящей из вычислительных комплексов, каждый из которых состоит из элементов, одинаково необходимых для его работоспособности. Примером такой системы является система учета потребления электроэнергии. Однако многие системы состоят из вычислительных комплексов, в которых одни элементы (элементы первого типа) обязательны для функционирования вычислительных комплексов, а другие (элементы второго типа) – нет. Отказ элемента первого типа приводит к отказу вычислительного комплекса. Отказ элемента второго типа делает комплекс неисправным: снижается эффективность его функционирования, но это не приводит к его неработоспособности. Решение задачи определения РТО для таких систем в литературе отсутствует. Данная работа посвящена ликвидации этого пробела. Актуальность исследования состоит в том, что большинство реально существующих БРИС относится именно к рассматриваемому классу.

Целью настоящей работы является повышение экономической эффективности БРИС за счет рационального выбора РТО.

Работа имеет следующую структуру. В первом разделе сформулирована математическая постановка задачи и введены используемые обозначения. Второй раздел состоит из трех подразделов. В первом из них выводятся дифференциальные уравнения, описывающие динамику изменения средней численности элементов, находящихся в различных состояниях в процессе функционирования БРИС. Большое внимание здесь уделено выводу значений интенсивностей переходов элемента из одного состояния в другое. Показано, что эти интенсивности в общем случае не являются постоянными, в силу чего дифференциальные уравнения нелинейны. Во втором подразделе выводятся формулы для определения объема РТО, при котором среднее количество исправных вычислительных комплексов достигает максимума. В третьем подразделе приведен пример расчета РТО. В третьем разделе статьи обсуждается, какие из ограничений, сделанных при постановке задачи, наиболее существенны. Кроме того, объяснено, по-

чему для аналитического решения поставленной задачи нельзя применить классический метод расчета систем массового обслуживания, основанный на уравнениях Колмогорова, и приходится прибегать к методу динамики средних. В четвертом разделе даны рекомендации, когда целесообразно применять полученные в работе формулы расчета РТО, а когда придется численно решать жесткую систему нелинейных дифференциальных уравнений динамики средних. В Заключении перечислены новые научные результаты, полученные в данной работе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим БРИС, состоящую из N вычислительных комплексов, в состав каждого из которых входят два элемента. Один из них (элемент первого типа) обязателен для работоспособности комплекса, отказ другого (элемента второго типа) лишь снижает эффективность его функционирования. Отказ одного вычислительного комплекса не приводит к неработоспособности всей системы, но снижает эффективность ее функционирования.

Введем для элементов первого и второго типов следующие показатели: среднее время безотказной работы – $\overline{T}_0^{(1)}$, $\overline{T}_0^{(2)}$; среднее время замены – $\overline{T}_{\text{ЗМ}}^{(1)}$, $\overline{T}_{\text{ЗМ}}^{(2)}$; среднее время ремонта – $\overline{T}_{\text{РМ}}^{(1)}$, $\overline{T}_{\text{РМ}}^{(2)}$. При этом среднее время безотказной работы элементов первого и второго типов больше суммарного времени, требуемого на их замену и ремонт. Для восстановления системы создан СТЦ. Замену элементов осуществляет бригада курьеров из r человек. Ремонт выполняет другая бригада, в которой выделены специализированные группы для элементов первого и второго типов численностью $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ соответственно. В начальный момент имеется $n^{(1)}$ запасных элементов первого типа и $n^{(2)}$ второго типа.

Требуется определить численность персонала и количество запасных элементов, при которых среднее число исправных комплексов стабилизируется к максимальному значению.

2. Метод решения

2.1. Модель восстановления системы вычислительных комплексов, состоящих из неоднородных зависимых элементов

Предположим, что случайные величины «время безотказной работы», «время замены», «время ремонта элемента первого типа» и «время ремонта элемента второго типа» распределены показательно с параметрами $\lambda_0^{(1)}$, $\lambda_0^{(2)}$, $\lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)}$, $\lambda_{\text{ЗМ}}^{(2)}$, $\lambda_{\text{РМ}}^{(1)}$, $\lambda_{\text{РМ}}^{(2)}$. Значение каждого параметра является величиной, обратной среднему значению соответствующего времени. Тогда для описания изменения средних численностей элементов, находящихся в различных состояниях, можно применить метод динамики средних [13].

В этом случае граф состояний элементов системы состоит из двух подграфов, представленных на *рисунке 1.* В отличие от системы из независимых элементов, эти подграфы не идентичны.

Первый из подграфов описывает возможные состояния элемента первого типа, отказ которого приводит к неработоспособности комплекса, в который он входит. Данный подграф содержит следующие вершины:

$S_1^{(1)}$ – элемент первого типа исправен и функционирует в составе одного из комплексов;

$S_2^{(1)}$ – элемент первого типа отказал и ждет замены;

$S_3^{(1)}$ – элемент первого типа неработоспособен, доставлен в ремонтный центр, ожидает ремонта или ремонтируется;

$S_4^{(1)}$ – элемент первого типа исправен и находится на складе ремонтного центра.

Подграф, описывающий состояния элемента второго типа, имеет, в отличие от первого подграфа, не четыре, а пять вершин. Четыре из них, – $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$, $S_3^{(2)}$, $S_4^{(2)}$, – соответствуют состояниям элемента второго типа, аналогичным $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_3^{(1)}$, $S_4^{(1)}$. Пятая вершина характеризует состояние $S_5^{(2)}$ – элемент второго типа работоспособен, находится в составе комплекса, но не функционирует ввиду отказа эле-

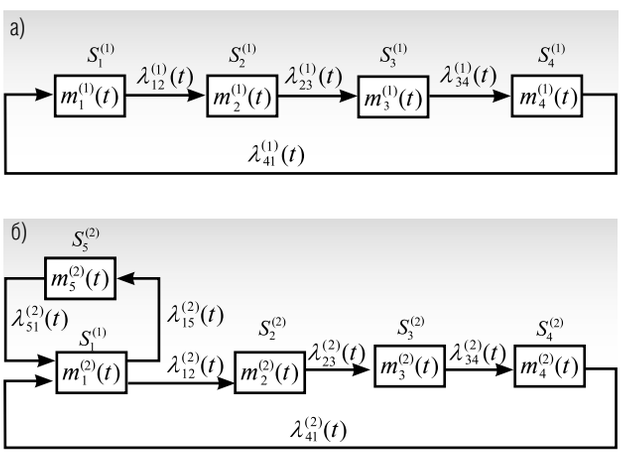

Рис. 1. Граф состояний (а) элемента первого типа, (б) элемента второго типа

мента первого типа. Именно возможность такого состояния объясняет зависимость между элементами первого и второго типов.

Изменение численности элементов описывается решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1^{(1)}(t)}{dt} = -\lambda_{12}^{(1)} m_1^{(1)}(t) + \lambda_{41}^{(1)} m_4^{(1)}(t), \\ \dfrac{dm_2^{(1)}(t)}{dt} = -\lambda_{23}^{(1)} m_2^{(1)}(t) + \lambda_{12}^{(1)} m_1^{(1)}(t), \\ \dfrac{dm_3^{(1)}(t)}{dt} = -\lambda_{34}^{(1)} m_3^{(1)}(t) + \lambda_{23}^{(1)} m_2^{(1)}(t), \\ \dfrac{dm_4^{(1)}(t)}{dt} = -\lambda_{41}^{(1)} m_4^{(1)}(t) + \lambda_{34}^{(1)} m_3^{(1)}(t), \\ m_1^{(1)}(t) + m_2^{(1)}(t) + m_3^{(1)}(t) + m_4^{(1)}(t) = N + n^{(1)}, \\ \dfrac{dm_1^{(2)}(t)}{dt} = -[\lambda_{12}^{(2)} + \lambda_{15}^{(2)}] m_1^{(2)}(t) + \lambda_{41}^{(2)} m_4^{(2)}(t) + \lambda_{51}^{(2)} m_5^{(2)}(t), \\ \dfrac{dm_2^{(2)}(t)}{dt} = -\lambda_{23}^{(2)} m_2^{(2)}(t) + \lambda_{12}^{(2)} m_1^{(2)}(t), \\ \dfrac{dm_3^{(2)}(t)}{dt} = -\lambda_{34}^{(2)} m_3^{(2)}(t) + \lambda_{23}^{(2)} m_2^{(2)}(t), \\ \dfrac{dm_4^{(2)}(t)}{dt} = -\lambda_{41}^{(2)} m_4^{(2)}(t) + \lambda_{34}^{(2)} m_3^{(2)}(t), \\ \dfrac{dm_5^{(2)}(t)}{dt} = -\lambda_{51}^{(2)} m_5^{(2)}(t) + \lambda_{15}^{(2)} m_1^{(2)}(t), \\ m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t) + m_3^{(2)}(t) + m_4^{(2)}(t) + m_5^{(2)}(t) = N + n^{(2)}, \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} & m_1^{(1)}(0) = m_1^{(2)}(0) = N; \quad m_4^{(1)}(0) = n^{(1)}; \quad m_4^{(2)}(0) = n^{(2)}; \\ & m_2^{(1)}(0) = m_2^{(2)}(0) = m_3^{(1)}(0) = m_3^{(2)}(0) = m_5^{(2)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Существует связь между количеством элементов различных типов. Интенсивность переходов элементов из одних состояний в другие зависит от распределения элементов по состояниям. Вид выражений, определяющих значения величин $\lambda_i^{(1)}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $\lambda_j^{(2)}(t)$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$), будет различаться при различных соотношениях между приоритетами элементов. Типовыми являются два случая:

✦ приоритеты элементов первого и второго типов одинаковы;

✦ элементы первого типа заменяются вне очереди, поскольку их работоспособность является обязательным условием для функционирования комплексов системы.

Рассмотрим второй случай, когда приоритет на обслуживание элементов первого типа выше, чем у элементов второго типа.

Определим интенсивность переходов элементов из одних состояний в другие. Некоторые из этих значений постоянны, а остальные зависят от численностей элементов, находящихся в других состояниях. Поэтому система (1) является нелинейной. Численность элементов, находящихся в различных состояниях, не известна. Следуя принципу Динера, будем заменять неизвестные нам значения численности элементов, находящихся в различных состояниях, их средними значениями, и в дальнейшем употреблять выражения «численность элементов» и «средняя численность элементов» как синонимы. Начнем с $\lambda_{12}^{(1)}(t)$ – интенсивности перехода элемента первого типа из состояния $S_1^{(1)}$ в состояние $S_2^{(1)}$. Она является постоянной. Действительно, если в момент времени t функционирует $m_1^{(1)}(t)$ элементов первого типа, то суммарная интенсивность их отказов составит

$$\Lambda^{(1)}(t) = \lambda_0^{(1)} m_1^{(1)}(t), \quad (3)$$

что в расчете на один элемент дает:

$$\lambda_{12}^{(1)}(t) = \frac{\Lambda^{(1)}(t)}{m_1^{(1)}(t)} = \lambda_0^{(1)}. \quad (4)$$

Определим $\lambda_{23}^{(1)}(t)$: эта интенсивность перехода не будет постоянной. Действительно, допустим, что в момент времени t $m_2^{(1)}(t)$ элементов первого типа неработоспособны и ожидают прибытия курьера для замены их на запасные. Здесь возможными являются два варианта типовых действий курьера:

✦ доставлять элементы в ремонт, независимо от того, есть ли чем их заменять, а затем устанавливать запасные элементы по мере их поступления из ремонта;

✦ в случае отсутствия запасных элементов ждать получения отремонтированных элементов и не выполнять доставку в ремонт без замены.

По сравнению со вторым вариантом, первый вариант действий курьера, как правило, позволяет несколько снизить потребность в запасных элементах, поэтому рассмотрим его подробнее. Здесь интенсивность перехода $\lambda_{23}^{(1)}(t)$ зависит лишь от соотношения между численностью курьеров r и элементов в состоянии $S_2^{(1)}$. Действительно, если $r \geq m_2^{(1)}(t)$, то суммарная интенсивность перехода из состояния $S_2^{(1)}$ в $S_3^{(1)}$ будет равна

$$\Lambda_{23}(t) = \lambda_{3\text{м}}^{(1)} m_2^{(1)}(t), \quad (5)$$

что в расчете на один элемент составляет:

$$\lambda_{23}^{(1)}(t) = \lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)}. \quad (6)$$

Если же $r < m_2^{(1)}(t)$, то суммарная интенсивность перехода из состояния $S_2^{(1)}$ в $S_3^{(1)}$ будет равна

$$\Lambda_{23}(t) = \lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)} r, \quad (7)$$

что в расчете на один элемент составляет:

$$\lambda_{23}^{(1)}(t) = \frac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)} r}{m_2^{(1)}(t)}. \quad (8)$$

Аналогично может быть определена интенсивность ремонта в расчете на один элемент:

$$\lambda_{34}^{(1)}(t) = \begin{cases} \lambda_{\text{РМ}}^{(1)}, & R \geq m_3^{(1)}(t); \\ \dfrac{\lambda_{\text{РМ}}^{(1)} R^{(1)}}{m_3^{(1)}(t)}, & R < m_3^{(1)}(t). \end{cases} \quad (9)$$

Интенсивность перехода элемента первого типа из состояния $S_4^{(1)}$ в $S_1^{(1)}$ определяется соотношениями между $m_{\text{ТР}}^{(1)}(t)$ – численностью элементов первого типа, которые необходимо направить в момент t для установки в систему, численностью курьеров r и количеством запасных элементов, имеющихся в наличии на складе. Величина $m_{\text{ТР}}^{(1)}(t)$ равна разности между общим количеством элементов первого типа в исправной системе N и численностью функционирующих элементов первого типа $m_1^{(1)}(t)$:

$$m_{\text{ТР}}^{(1)}(t) = N - m_1^{(1)}(t). \quad (10)$$

В некоторые моменты времени потребность в элементах может не совпадать с числом ожидающих замены $m_2^{(1)}(t)$, поскольку курьеры забирают отказавшие элементы для стационарного ремонта даже тогда, когда заменить их нечем. Поэтому имеет место соотношение:

$$m_{\text{ТР}}^{(1)}(t) = N - m_1^{(1)}(t) \neq m_2^{(1)}(t). \quad (11)$$

Это будет иметь место при недостатке запасных элементов или мощности ремонтной бригады. Учитывая последнее, окончательно получим следующие выражения для интенсивности перехода $\lambda_{41}^{(1)}(t)$:

$$\lambda_{41}^{(1)}(t) = \frac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)}, \min\left\{\left[N - m_1^{(1)}(t)\right], r, m_4^{(1)}(t)\right\}}{m_4^{(1)}(t)}. \quad (12)$$

Теперь определим интенсивности переходов для элемента второго типа. Особенностью элемента второго типа является то, что он может быть исправен, находиться в составе комплекса, но не функционировать ввиду отказа элемента первого типа.

Аналогично тому, как это было сделано для элемента первого типа, можно показать, что

$$\lambda_{12}^{(2)}(t) = \lambda_0^{(2)}, \quad (13)$$

Интенсивность перехода элемента второго типа из состояния $S_2^{(2)}$ в $S_3^{(2)}$, при наличии у элемента первого типа более высокого приоритета на замену, зависит от соотношения численности элементов второго типа, которые необходимо доставить в ремонт $m_2^{(2)}(t)$, и количеством курьеров $r_{\text{св}}(t)$, не занятых работой с элементами первого типа.

Нетрудно убедиться, что

$$r_{\text{св}}(t) = r - m_{\text{ТР}}^{(1)}(t) = r - \left[N - m_1^{(1)}(t)\right] = r + m_1^{(1)}(t) - N. \quad (14)$$

Соответственно

$$\lambda_{23}^{(2)}(t) = \begin{cases} 0, \ r_{\text{св}} \leq 0; \\ \dfrac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(2)}, \min\left\{r_{\text{св}}(t), m_2^{(2)}(t)\right\}}{m_4^{(2)}(t)}, \ r_{\text{св}}(t) > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Интенсивность перехода из ремонтного центра на склад для элемента второго типа:

$$\lambda_{34}^{(2)}(t) = \begin{cases} \lambda_{\text{РМ}}^{(2)}, \ m_3^{(2)}(t) \leq R^{(2)}; \\ \dfrac{\lambda_{\text{РМ}}^{(2)} R}{m_3^{(2)}(t)}, \ m_3^{(2)}(t) > R^{(2)}. \end{cases} \quad (16)$$

Интенсивность $\lambda_{41}^{(2)}(t)$ зависит от соотношений между численностями свободных курьеров $r_{\text{св}}(t)$, запасных элементов второго типа на складе $m_4^{(2)}(t)$ и потребностью в запасных элементах второго типа, которые необходимо установить в систему – $m_{\text{ТР}}^{(2)}(t)$.

Величина $m_{\text{ТР}}^{(2)}(t)$, в отличие от $m_{\text{ТР}}^{(1)}(t)$, не равна разности между общим количеством комплексов в системе и численностью функционирующих элементов данного типа. Это связано с тем, что элементы второго типа могут не функционировать ввиду отказа элемента первого типа. Поэтому

$$m_{\text{ТР}}^{(2)}(t) = m_1^{(1)}(t) - m_1^{(2)}(t). \quad (17)$$

Учитывая это, окончательно получим

$$\lambda_{41}^{(2)}(t) = \begin{cases} 0, \ r_{\text{св}} \leq 0; \\ \dfrac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(2)} \min\left\{r_{\text{св}}(t), m_{\text{ТР}}^{(2)}(t), m_4^{(2)}(t)\right\}}{m_4^{(2)}(t)}, \ r_{\text{св}}(t) > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Выведем формулу для определения интенсивности $\lambda_{15}^{(2)}(t)$. В состояние $S_5^{(2)}$ элементы второго типа переводят отказы элементов первого типа, имеющие суммарную интенсивность

$$\Lambda_5(t) = \lambda^{(1)} m_1^{(1)}(t). \qquad (19)$$

В расчете на один элемент второго типа, находящийся в состоянии $S_1^{(1)}$, получим

$$\lambda_{15}^{(2)}(t) = \frac{\lambda_0^{(1)} m_1^{(1)}(t)}{m_1^{(2)}(t)}. \qquad (20)$$

Интенсивность перехода $\lambda_{51}^{(2)}(t)$ равна отношению суммарной интенсивности переходов элементов первого типа в рабочее состояние к численности элементов второго типа, находящихся в состоянии $S_5^{(2)}$:

$$\lambda_{51}^{(2)}(t) = \frac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)} \min\left\{\left[N - m_1^{(1)}(t)\right],\ r,\ m_4^{(1)}(t)\right\}}{m_5^{(2)}(t)}. \qquad (21)$$

Путем численного решения системы (1) при найденных значениях интенсивностей, являющихся коэффициентами входящих в нее уравнений, можно определить распределение элементов по состояниям при любой численности курьеров, ремонтников и запасных элементов. Уравнения системы (1) являются жесткими [14], прежде всего, поскольку наработка на отказ у современных вычислительных комплексов может быть на несколько порядков больше, чем средние значения длительности замены и ремонта. Вместе с тем сложность расчетов не выходит за пределы методов, реализованных в MathCAD [14, 15].

2.2. Оценка необходимого объема ресурсов на техническое обслуживание

Перейдем к определению достаточного объема РТО, при котором средняя численность исправных комплексов системы будет стабилизироваться к максимуму. Эта задача сводится к определению численности персонала и запасных элементов, при которых решение системы не выйдет за границы области малых очередей.

Границы области малых очередей в данном случае можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} r_{\text{св}}(t) \ge m_{\text{ТР}}^{(1)}(t) + m_{\text{ТР}}^{(2)}(t), \\ R^{(1)} \ge m_3^{(1)}(t), \\ R^{(2)} \ge m_3^{(2)}(t), \\ m_4^{(1)}(t) \ge m_{\text{ТР}}^{(1)}(t), \\ m_4^{(2)}(t) \ge m_{\text{ТР}}^{(2)}(t). \end{cases} \qquad (22)$$

В области малых очередей коэффициенты системы (1) принимают значения:

$$\lambda_{12}^{(1)} = \lambda_0^{(1)};\ \lambda_{23}^{(1)} = \lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)};\ \lambda_{34}^{(1)} = \lambda_{\text{РМ}}^{(1)};\ \lambda_{41}^{(1)} = \frac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)}(N - m_1^{(1)})}{m_4^{(1)}};$$

$$\lambda_{12}^{(2)} = \lambda_0^{(2)};\ \lambda_{23}^{(2)} = \lambda_{\text{ЗМ}}^{(2)};\ \lambda_{34}^{(2)} = \lambda_{\text{РМ}}^{(2)};\ \lambda_{41}^{(2)} = \frac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(2)}(m_1^{(1)} - m_1^{(2)})}{m_4^{(2)}};$$

$$\lambda_{15}^{(2)} = \frac{\lambda_0^{(1)} m_1^{(1)}}{m_1^{(2)}};\ \lambda_{51}^{(2)} = \frac{\lambda_{\text{ЗМ}}^{(1)}(N - m_1^{(1)})}{m_5^{(2)}}. \qquad (23)$$

Решение системы (1) в области малых очередей (22) стабилизируется к предельным значениям $m_i^{(1)}$ и $m_j^{(2)}$. Для их нахождения достаточно решить алгебраическую систему, получаемую из (1) путем подстановки в нее значений коэффициентов (23) и замены на ноль всех производных от численностей состояний по времени. В результате окончательно получим:

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} &= K_{\text{г}}^{(1)} N; \\ m_2^{(1)} &= \left(1 - K_{\text{г}}^{(1)}\right) N; \\ m_3^{(1)} &= \frac{\overline{T}_{\text{РМ}}^{(1)}}{\overline{T}_0^{(1)} + \overline{T}_{\text{ЗМ}}^{(1)}} N; \\ m_4^{(1)} &= n^{(1)} - m_3^{(1)}; \\ m_1^{(2)} &= K_{\text{г}}^{(1)} K_{\text{г}}^{(2)} N; \\ m_2^{(2)} &= K_{\text{г}}^{(1)} \left(1 - K_{\text{г}}^{(2)}\right) N; \\ m_3^{(2)} &= K_{\text{г}}^{(1)} \frac{\overline{T}_{\text{РМ}}^{(2)}}{\overline{T}_0^{(2)} + \overline{T}_{\text{ЗМ}}^{(2)}} N; \\ m_4^{(2)} &= n^{(2)} - m_3^{(2)}; \\ m_5^{(2)} &= N - m_1^{(1)}; \end{aligned} \qquad (24)$$

где $K_{\text{г}}^{(1)}$, $K_{\text{г}}^{(2)}$ – максимальные установившиеся значения коэффициентов готовности элементов первого и второго типов:

$$\begin{aligned} K_{\text{г}}^{(1)} &= \frac{\overline{T}_0^{(1)}}{\overline{T}_0^{(1)} + \overline{T}_{\text{ЗМ}}^{(1)}}, \\ K_{\text{г}}^{(2)} &= \frac{\overline{T}_0^{(2)}}{\overline{T}_0^{(2)} + \overline{T}_{\text{ЗМ}}^{(2)}}. \end{aligned} \qquad (25)$$

При установившемся распределении численностей элементов границы областей малых очередей можно задать системой неравенств:

$$\begin{cases} r_{\text{св}} \ge m_{\text{ТР}}^{(1)} + m_{\text{ТР}}^{(2)}, \\ R^{(1)} \ge m_3^{(1)}, \\ R^{(2)} \ge m_3^{(2)}, \\ m_4^{(1)} \ge m_{\text{ТР}}^{(1)}, \\ m_4^{(2)} \ge m_{\text{ТР}}^{(2)}. \end{cases} \qquad (26)$$

Здесь $r_{св}$, $m_{ТР}^{(1)}$, $m_{ТР}^{(2)}$ – предельные значения, к которым в области малых очередей стремятся функции $r_{св}(t)$, $m_{ТР}^{(2)}(t)$, $m_{ТР}^{(1)}(t)$ при $t \to \infty$.

Определим неизбыточный набор ресурсов, при котором неравенства (26) будут выполнены. Этот набор является достаточным для обеспечения стабилизации математического ожидания числа исправных комплексов, в которых функционируют оба элемента, к максимальному значению при $t \to \infty$.

Для этого определим величины $m_{ТР}^{(1)}$ и $m_{ТР}^{(2)}$. Учитывая (10), (17), (26), получим:

$$m_{ТР}^{(1)} = N - m_1^{(1)} = \left(1 - K_г^{(1)}\right) N;$$
$$m_{ТР}^{(2)} = K_г^{(1)} \left(1 - K_г^{(2)}\right) N. \qquad (27)$$

Второе и третье неравенства системы (26) выполняются при всех $R^{(1)} \geq R_0^{(1)}$ и $R^{(2)} \geq R_0^{(2)}$, где:

$$R_0^{(1)} = \left\lceil \frac{\bar{T}_Р^{(1)}}{\bar{T}_0^{(1)} + \bar{T}_{ЗМ}^{(1)}} N \right\rceil,$$
$$R_0^{(2)} = \left\lceil K_г^{(1)} \frac{\bar{T}_Р^{(2)}}{\bar{T}_0^{(2)} + \bar{T}_{ЗМ}^{(2)}} N \right\rceil. \qquad (28)$$

Подставляя (27) в первое неравенство системы (26), получим, что первое неравенство системы (26) выполняется при $r \geq r_0$, где

$$r_0 = \left\lceil N(1 - K_г^{(1)} K_г^{(2)}) \right\rceil. \qquad (29)$$

Аналогично можно убедиться, что условие отсутствия очередей на замену ввиду отсутствия запасных элементов выполняется тогда, когда для количества запасных элементов первого типа справедливо неравенство $n^{(1)} > n_0^{(1)}$, а для количества запасных элементов второго типа – $n^{(2)} > n_0^{(2)}$, где:

$$n_0^{(1)} = \left\lceil \frac{\bar{T}_Р^{(1)} + \bar{T}_{ЗМ}^{(1)}}{\bar{T}_0^{(1)} + \bar{T}_{ЗМ}^{(1)}} N \right\rceil,$$
$$n_0^{(2)} = \left\lceil K_г^{(1)} \frac{\bar{T}_Р^{(2)} + \bar{T}_{ЗМ}^{(2)}}{\bar{T}_0^{(2)} + \bar{T}_{ЗМ}^{(2)}} N \right\rceil. \qquad (30)$$

Окончательно получим, что необходимым является набор ресурсов $v_0 = \left\{R_0^{(1)}, R_0^{(1)}, r_0, n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\right\}$. Он обеспечивает среднюю численность исправных вычислительных комплексов, математическое ожидание которой стабилизируется со временем к максимальному значению

$$m_и = m_1^{(1)} - m_2^{(2)} = K_г^{(1)} K_г^{(2)} N. \qquad (31)$$

2.3. Пример расчета необходимого объема ресурсов на техническое обслуживание

Предположим, что в системе используется 1000 вычислительных комплексов, каждый из которых включает основной вычислительный блок (элемент первого типа) и устройство резервного хранения вводимых данных (элемент второго типа), которое не является обязательным. Их наработки на отказ составляют: $T_0^{(1)} = 6000$ часов, $T_0^{(2)} = 3500$ часов. Затраты времени на замену равны $T_{ЗМ}^{(1)} = 12$ часов и $T_{ЗМ}^{(2)} = 14$ часов, а затраты времени на ремонт составляют $T_{РМ}^{(1)} = 72$ часов и $T_{РМ}^{(2)} = 48$ часов.

Требуется определить численность персонала и количество запасных элементов, которые необходимы для организации агрегатного восстановления.

Используя формулы (28)–(30), получим: $r_0 = 7$; $R_0^{(1)} = 12$; $R_0^{(2)} = 14$; $n_0^{(1)} = 14$, $n_0^{(2)} = 18$. При таком наборе РТО средняя численность исправных вычислительных комплексов достигает максимума, определяемого формулой (31): $m_И = 994$. Если же возникает необходимость оценить, возможно ли компенсировать недостаток в ремонтниках за счет увеличения числа запасных элементов, то это можно сделать, решая систему (1) при различных $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$. При этом указанные выше значения предельно сужают диапазон, в котором имеет смысл их изменять.

3. Дискуссия

Таким образом, в результате исследования получены аналитические выражения для расчета РТО. Обсудим, насколько значимы принятые ограничения и как выбранный метод решения на влияет результаты.

1. Предположение о двух элементах вычислительного комплекса сделано для простоты изложения и не уменьшает общности полученных результатов. Они могут быть легко обобщены на случай, когда в состав вычислительного комплекса входят несколько элементов первого типа и несколько элементов второго типа.

2. Сформулированное условие о том, что наработка на отказ любого элемента больше, чем суммарное время его замены и ремонта, существенно для стабилизации решения системы (1).

3. В данной работе задача решена методом динамики средних, который относится к приближенным аналитическим методам решения задач мас-

сового обслуживания. Метод динамики средних позволяет составить уравнения изменения математических ожиданий (средних) численности элементов системы, находящихся в различных возможных состояниях. За счет этого он применим для больших систем, в отличие от точных методов, основанных на уравнениях Колмогорова, описывающих изменения вероятностей состояний всей системы в целом [16–21]. Применение принципа Динера при определении интенсивностей переходов делает результаты решения системы (1) приближенными. Соответственно, истинное время стабилизации может отличаться от расчетного. Однако для области малых очередей (26) это различие не существенно.

4. Подчинение наработки на отказ, времени ремонта и времени замены показательному закону существенно (хотя известно, что метод динамики средних дает неплохие результаты и при законах распределения, аппроксимируемых показательным).

5. Только с помощью имитационного моделирования можно проверить, насколько сильно законы распределения влияют на требуемый объем РТО [22, 23]. При этом надо иметь в виду, что моделируется замкнутая система массового обслуживания с большим количеством сущностей [24]. Также с помощью имитационного моделирования надо определить, как влияет сменный характер работы персонала на необходимый объем РТО для систем, рассмотренных в данной работе.

4. Рекомендации

На основе проведенного исследования сформируем следующие рекомендации:

✦ Формулы (28)–(30) следует применять для определения объема РТО, когда потери от неисправности вычислительного комплекса существенно выше затрат на оплату персонала и стоимости запасных элементов. Именно такая ситуация имеет место для ответственных систем на железнодорожном транспорте.

✦ Если затраты, связанные с РТО, сопоставимы с доходом от функционирования исправного вычислительного комплекса в системе, то возникает задача определения РТО, при котором прибыль будет максимальна [25]. Такая ситуация возникает, например, при сдаче оборудования в аренду. В этом случае для определения прибыли за период надо решать систему (1).

✦ При решении системы (1) надо учитывать, что, как правило, это жесткая система нелинейных дифференциальных уравнений, поскольку интенсивность отказов намного меньше интенсивности замен и ремонтов. Необходимо правильно выбрать метод решения.

✦ Изменяя начальные условия при решении системы (1), можно определить сколько времени потребуется персоналу СТЦ для восстановления БРИС, если в силу каких-либо причин в ней будут накоплены неисправные вычислительные комплексы.

Заключение

В результате проведенного исследования получены следующие новые результаты.

Разработана математическая модель восстановления БРИС, состоящей из вычислительных комплексов, каждый из которых включает в себя элементы, имеющие различную значимость для его работоспособности. Модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений. Решение системы описывает изменение во времени численностей элементов, находящихся в различных состояниях (включая наиболее значимые состояния: работоспособен, неработоспособен) в зависимости от объема РТО.

Определены численность персонала и запасных элементов, при которых математическое ожидание (средняя численность) исправных вычислительных комплексов стабилизируется со временем к максимальному значению. Эти результаты можно использовать для определения ресурсов на обслуживание реальных БРИС. ■

Литература

1. Белов А.А., Гвоздев А.В. Модульное построение автоматизированной системы управления организационными процессами // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2007. № 3. С. 94–98.
2. Кравченко Т.К., Пресняков В.Ф. Инфокоммуникационные технологии управления предприятием. М.: ГУ-ВШЭ. 2003.
3. Кузьминов Я.И., Яковлев А.А., Гохберг Л.М. Новая экономика – шанс для России: Тезисы. Препринт WP5/2003/01. М.: ГУ ВШЭ, 2003.

4. Розенберг Е.Н., Батраев В.В. Инновационное развитие систем интервального регулирования // Автоматика, связь, информатика. 2018. № 7. С. 5–9.

5. Розенберг Е.Н., Дзюба Ю.В., Батраев В.В. О направлениях развития цифровой железной дороги // Автоматика, связь, информатика. 2018. № 1. С. 9–13.

6. Розенберг Е.Н., Коровин А.С. Глобальные тренды развития интеллектуальных транспортных систем // Автоматика, связь, информатика. 2018. № 12. С. 14–19.

7. Данилин А.В. Электронные государственные услуги и административные регламенты: от политической задачи к архитектуре «электронного правительства». М.: ИНФРА-М, 2004.

8. Лисенков В.М. Статистическая теория безопасности движения поездов. М: ВИНИТИ, 1999.

9. Пронкин А.В. Системы СЦБ как основа цифровой железной дороги // Автоматика, связь, информатика. 2018. № 12. С. 41–42.

10. Макарова А.А. Автоматизированная система оперативного управления перевозками // Сборник научных трудов национальной научно-практической конференции «Экосистема цифровой экономики: проблемы, реалии и перспективы». Орел, 23–25 апреля 2018 г. / под ред. Л.И. Малявкиной. С. 114–118.

11. Мамилов Б.Е., Липская М.А., Толымбекова Б.Е. Автоматизированная система оперативного управления перевозками // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. 2018. № 1 (104). С. 139–146.

12. Лохманов В.М., Марон А.И. Определение экономически обоснованной численности персонала и ЗИП для сложных систем в электроэнергетике // Вестник Московской академии рынка труда и информационных технологий. 2002. № 4. С. 18–22.

13. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио. 1972.

14. Сахаров М.К. Корректность и точность решений жестких систем ОДУ в системе MathCAD14 // Наукоемкие технологии и интеллектуальные системы. М.: МГТУ, 2011. С. 16–19.

15. Воскобойников Ю.Е, Задорожный А.Ф. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME. СПб: Лань, 2016.

16. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: URSS, 2019.

17. Каштанов В.А., Ивченко Г.И., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М.: Либроком, 2012.

18. Каштанов В.А., Медведев А.И. Теория надежности сложных систем. М.: Физматлит, 2010.

19. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания. М.: URSS, 2018.

20. Тихоненко О.М. Модели массового обслуживания в информационных системах. Минск: Технопринт, 2003.

21. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: URSS, 2004.

22. Акопов А.С. Имитационное моделирование. М.: Юрайт, 2014.

23. Исаев Д.В. Моделирование реализации проектов внедрения аналитических информационных систем // Аудит и финансовый анализ. 2014. № 6. С. 416–422.

24. Kelton W.D., Sadowski R.P., Zupick N.B. Simulation with Arena. N.Y.: McGraw Hill, 2014.

25. Скрипкин К.Г. Экономическая эффективность информационных систем. М.: ДМК-Пресс, 2002.

Об авторах

Марон Аркадий Исаакович

кандидат технических наук, старший научный сотрудник;

доцент кафедры бизнес-аналитики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20;

E-mail: amaron@hse.ru

Кравченко Татьяна Константиновна

доктор экономических наук, профессор;

заведующая кафедрой бизнес-аналитики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20;

E-mail: tkravchenko@hse.ru

Шевгунов Тимофей Яковлевич

кандидат технических наук;

доцент кафедры бизнес-аналитики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20;

доцент кафедры «Теоретическая радиотехника», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4;

E-mail: tshevgunov@hse.ru

Estimation of resources required for restoring a system of computer complexes with elements of different significance

Arkady I. Maron [a]
E-mail: amaron@hse.ru

Tatiana K. Kravchenko [a]
E-mail: tkravchenko@hse.ru

Timofey Ya. Shevgunov [a,b]
E-mail: tshevgunov@hse.ru

[a] National Research University Higher School of Economics
Address: 20, Myasnitskaya Street, Moscow 101000, Russia

[b] Moscow Aviation Institute (National Research University)
Address: 4, Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia

Abstract

Large distributed information systems (LDIS) are the basis for digitization of production processes in industry, transport and public administration. Organization of their engineering servicing (ES) for timely restoration in case of failure is a topical issue of scientific research. LDIS consists of computer complexes which include both major and additional elements. The literature provides no solution which allows us to define the engineering servicing resources (ESR), considering the variable significance of elements of computer complexes. The task was first set and solved in this publication.

For solution of this task, we applied the mean dynamic method. This method was chosen because it makes it possible to obtain a system of differential equations for describing the change over time of the mean number of elements in different states.

Analysis of the differential equations system solution allowed us to find analytical expressions for determining ESR – the number of staff and the number of spare elements at which the mean number of computer complexes in perfect state reaches its maximum. The results are applicable when calculating the ESR of real LDIS. They can also serve in simulation modeling as initial approximations of the optimal volume of ESR if it necessary to take into account the specific features of the system. In addition, the solution of differential equations makes it possible to solve the problem of optimizing the resources for servicing the LDIS according to economic criteria, when the costs of staff and spare elements are comparable with the income from operating the computer complexes.

Key words: distributed information systems; engineering servicing; dependability; queuing theory; mean dynamics method.

Citation: Maron A.I., Kravchenko T.K., Shevgunov T.Ya. (2019) Estimation of resources required for restoring systems of computer complexes with elements of different significance. *Business Informatics*, vol. 13, no 2, pp. 18–28.
DOI: 10.17323/1998-0663.2019.2.18.28

References

1. Belov A.A., Gvozdev A.V. (2007) Modular construction of an automated control system of organizational processes. *Vestnik of Ivanovo State Power Engineering University*, no 3, pp. 94–98 (in Russian).
2. Kravchenko T.K., Presnyakov V.F. (2003) *Info-communication technologies of enterprise management*. Moscow: HSE (in Russian).
3. Kuzminov Ya.I., Yakovlev A.A., Gokhberg L.M. (2003) *New economy – a chance for Russia*. Preprint WP5/2003/01. Moscow: HSE (in Russian).

4. Rozenberg E.N., Batraev V.V. (2018) Innovative development of interval regulation systems. *Automation, Communication and Informatics*, no 7, pp. 5–9 (in Russian).

5. Rozenberg E.N., Dzyuba Yu.V., Batraev V.V. (2018) On the directions of the digital railway development. *Automation, Communication and Informatics*, no 1, pp. 9–13 (in Russian).

6. Rozenberg E.N., Korovin A.S. (2018) Global trends of intellectual transportation systems development. *Automation, Communication and Informatics*, no 12, pp. 14–19 (in Russian).

7. Danilin A.V. (2004) *State electronic services and administrative regulations: from political task to e-government architecture*. Moscow: INFRA-M (in Russian).

8. Lisenkov V.M. (1999) *Statistical theory of train traffic safety*. Moscow: VINITI (in Russian)

9 Pronkin A.V. (2018) Automation systems as a base for digital railway. *Automation, Communication and Informatics*, no 12, pp. 41–42 (in Russian).

10. Makarova A.A. (2018) Automated system of operational transportation management. Proceedings of the *National Scientific and Practice Conference "Ecosystem of the digital economy: problems, realities and perspectives", Orel, Russia, April 23–25, 2018*, pp. 114–118.

11. Mamilov B.E., Lipskaya M.A., Tolymbekova B.E. (2018) An automated system of operational transportation management. *Bulletin of Kazakh Academy of Transport and Communications named after M. Tynyshpaev*, no 1, pp. 139–146 (in Rusian).

12. Lokhmanov V.M., Maron A.I. (2002) Determination of economically justified number of personnel and spare parts for complex systems in power industry. *Bulletin of the Moscow Academy of Labor Market and Information Technologies*, no 4, pp. 18–22 (in Russian).

13. Ventcel E.S. (1972) *Operation research*. Moscow: Soviet Radio (in Russian).

14. Sakharov M.K. (2011) Correctness and the accuracy of decisions of the ODES rigid systems in the MathCAD14 system. *High Technologies and Intellectual Systems*. Moscow: MSTU, pp. 16–19 (in Russian).

15. Voskobojnikov Yu.E, Zadorozhnyj A.F. (2016) *Fundamentals of computing and programming using MathCAD PRIME software*. Saint Petersburg: Lan' (in Russian).

16. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Soloviev A.D. (2019) *Mathematical methods in the reliability theory*. Moscow: URSS (in Russian).

17. Kashtanov V.A., Ivchenko G.I., Kovalenko I.N. (2012) *Queueing theory*. Moscow: Librokom (in Russian).

18. Kashtanov V.A., Medvedev A.I. (2010) *Reliability theory of complex systems*. Moscow: Fizmatlit (in Russian).

19. Kirpichnikov A.P. (2018) *Methods of applied queueing theory*. Moscow: URSS (in Russian).

20. Tikhonenko O.M. (2003) *Models of queueing theory in information systems*. Minsk: Tekhnoprint (in Russian).

21. Khinchin A.Ya. (2004) *Works on mathematical queueing theory*. Moscow: URSS (in Russian).

22. Akopov A.S. (2014) *Simulation modeling*. Moscow: Urait (in Russian).

23. Isaev D.V. (2014) Modeling of analytical information systems implementation projects. *Audit and Financial Analysis*, no 6, pp. 416–422 (in Russian).

24. Kelton W.D., Sadowski R.P., Zupick N.B. (2014) *Simulation with Arena*. N.Y.: McGraw Hill.

25. Skripkin K.G. (2002) *Economic efficiency of information systems*. Moscow: DMK Press (in Russian).

About the authors

Arkady I. Maron

Cand. Sci. (Tech.), Senior Researcher;

Associate Professor, Department of Business Analytics, National Research University Higher School of Economics, 20, Myasnitskaya Street, Moscow 101000, Russia;

E-mail: amaron@hse.ru

Tatiana K. Kravchenko

Dr. Sci. (Econ.);

Professor, Head of Department of Business Analytics, National Research University Higher School of Economics, 20, Myasnitskaya Street, Moscow 101000, Russia;

E-mail: tkravchenko@hse.ru

Timofey Ya. Shevgunov

Cand. Sci. (Tech.);

Associate Professor, Department of Business Analytics, National Research University Higher School of Economics, 20, Myasnitskaya Street, Moscow 101000, Russia;

Associate Professor, Department of Theoretical Radio Engineering, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia;

E-mail: tshevgunov@hse.ru