

[DOI: 10.17323/2587-814X.2022.3.7.23](https://doi.org/10.17323/2587-814X.2022.3.7.23)

Построение агрегированной производственной функции с реализацией на примере регионов Центрального федерального округа*

Р.А. Жуков 

E-mail: pluszh@mail.ru

Н.А. Козлова 

E-mail: 95kno@mail.ru

Е.В. Манохин 

E-mail: emanfinun@gmail.com

М.А. Плинская 

E-mail: maria.plinskaya@gmail.com

Финансовый университет при Правительстве РФ, Тульский филиал

Адрес: Россия, 300012, г. Тула, ул. Оружейная, д. 1-а

Аннотация

На базе разработанного метода оценки параметров агрегированной производственной функции, используемой для расчета динамических нормативов и построения интегральных показателей результативности функционирования социально-экономических систем, рассмотрен трехмерный случай. Агрегированная производственная функция определяется квадратичной сверткой производственных функций результатов функционирования элементов подсистемы и их корреляционной матрицы. Параметры агрегированной производственной функции определяются из решения задачи максимизации функции правдоподобия случайной величины – агрегированных по аналогичному правилу остатков производственных функций. На примере проектной подсистемы в рамках пространственно-временной классификации социально-экономических систем Г.Б. Клейнера получены скорректированные значения параметров функции, включающей степенные мультипликативные модели связи объема валового регионального продукта для разделов F (строительство), G (оптовая и розничная торговля), K (финансовая деятельность) по ОКВЭД 2 и стоимостью основных производственных фондов (всего для раздела K, для разделов F и G), среднегодовой численностью занятых (для разделов F и G) и среднегодовой численностью населения (для раздела K), построенные по данным за 2015–2020 годы (разделы G, K) и 2018–2020 годы (раздел F) для областей Центрального федерального округа. В качестве инструментальных средств были использованы программный комплекс «ЭФРА» и программный проект на языке Python. Полученные результаты могут быть использованы региональными органами управления при оценке результатов функционирования областей и формировании соответствующих нормативов в краткосрочном периоде.

* Статья опубликована при поддержке Программы НИУ ВШЭ «Университетское партнерство»

Ключевые слова: социально-экономическая система, плотность распределения вероятностей, агрегированная производственная функция, модель, интегральная оценка

Цитирование: Жуков Р.А., Козлова Н.А., Манохин Е.В., Плинская М.А. Построение агрегированной производственной функции с реализацией на примере регионов Центрального федерального округа // Бизнес-информатика. 2022. Т. 16. № 3. С. 7–23. DOI: 10.17323/2587-814X.2022.3.7.23

Введение

При оценке результатов функционирования региональных социально-экономических систем (РСЭС) используют как частные, так и интегральные индикаторы, последние из которых сводятся к агрегированию результативных признаков элементов СЭС, в том числе в задачах выявления значимых факторов, моделирования и прогнозирования социально-экономических процессов [1, 2] в контексте устойчивого, сбалансированного развития [3]. В большинстве случаев агрегирование осуществляется в форме средних и средневзвешенных различных типов [4–7], либо с использованием общепризнанных (анализ среды функционирования [8, 9], компонентный анализ [10, 11]) и специальных алгоритмов построения интегральных показателей [12, 13] с анализом корректности их построения [14]. В качестве частных индикаторов оценки функционирования РСЭС, входящих в состав интегрального показателя, чаще всего используют объем валового регионального продукта по соответствующим видам экономической деятельности в рамках секторальной [15] или пространственно-временной [16] классификаций социально-экономических подсистем для оценки сбалансированности функционирования регионов – субъектов РФ. Согласно пространственно-временной классификации Г.Б. Клейнера СЭС включает подсистемы четырех типов: объект (ограничена в пространстве, не ограничена во времени), среда (не ограничена ни в пространстве, ни во времени), процесс (не ограничена в пространстве, ограничена во времени), проект (ограничена в пространстве и во времени). Региональную проектную подсистему можно представить в виде трех элементов, каждый из которых есть совокупность экономических единиц – институциональных единиц – резидентов региона (в терминологии системы национальных счетов), вносящих вклад в объем валового регионального продукта (ВРП) по разделам F (строительство), G (оптовая и розничная торговля), K (финансовая деятельность) в соответствии с общероссийским классификатором видов эконо-

мической деятельности (ОКВЭД). Вторая редакция ОКВЭД 2 используется с 2017 года, ранее применялась ОКВЭД 1.

С целью моделирования и прогнозирования значений частных показателей – результатов функционирования элементов РСЭС – используют модели связи результативных и факторных признаков в виде экономико-статистических моделей – производственных функций (ПФ), устанавливающих зависимость между объемом выпуска и факторами производства, в том числе линейные [17, 18], квадратичные [19], логарифмические [20], транслогарифмические, построенные на базе функции Кобба-Дугласа [21], трансцендентные [22], степенные мультипликативные (наиболее часто встречаются в публикациях), в том числе с учетом инновационной составляющей [23] и др. Выбор функциональной формы моделей чаще всего определяется исследователем на основе проверки набора статистических гипотез. Также можно ввести и дополнительные критерии выбора, связанные, например, с качественным содержанием модели и приоритетами центров управления РСЭС в случае, если модели используются для установки нормативов [24]. Для оценки их параметров традиционно используют обычный (OLS) и обобщенный методы наименьших квадратов (GLS) и метод максимального правдоподобия (MLE).

Для подсистемы СЭС, характеризуемой набором моделей, ее интегральная оценка требует агрегирования соответствующих моделей функционирования элементов, в простейшем случае определяемой их простой или средневзвешенной суммой. Однако, в силу наличия взаимосвязей между элементами, процедура поиска параметров модели, характеризующей результат функционирования подсистемы в целом, – параметров агрегированной производственной функции (АПФ), уже становится неочевидной.

В авторской работе [25] представлен метод оценки параметров АПФ, апробированный на примере двухкомпонентной АПФ. В данной статье мы наце-

лены на применение метода для трехмерного случая, когда агрегированная производственная функция определяется квадратичной сверткой трех производственных функций, каждая из которых характеризует результаты функционирования элемента трехэлементной подсистемы СЭС. На примере оценки результатов функционирования проектных подсистем регионов Центрального федерального округа мы проверяем гипотезу о возможности использования метода для уточнения параметров агрегированной производственной функции на базе программного комплекса «ЭФРА» [26], а также специально разработанного на Python программного проекта.

1. Методология оценки результатов функционирования подсистемы и построения агрегированной производственной функции

Для оценки результатов функционирования подсистемы СЭС предложено использовать интегральный индикатор, обладающий свойствами монотонности, тождественности, соизмеримости, безразмерности и транзитивности, а также учитывающий взаимосвязи между элементами [27]:

$$\xi_{k,s_q}(t) = \frac{\sqrt{\sum_{i_1=1}^I \sum_{i_2=1}^I r_{i_1, i_2, s_q} \cdot y_{i_1, k, s_q}^0(t) \cdot y_{i_2, k, s_q}^0(t)}}{\sqrt{\sum_{i_1=1}^I \sum_{i_2=1}^I \widehat{r}_{i_1, i_2, s_q} \cdot \widehat{y}_{i_1, k, s_q}^0(t) \cdot \widehat{y}_{i_2, k, s_q}^0(t)}}, \quad (1)$$

где r_{i_1, i_2, s_q} , $\widehat{r}_{i_1, i_2, s_q}$ – соответствующие значения парного коэффициента корреляции между i_1 -ми y_{i_1, s_q}^0 , \widehat{y}_{i_1, s_q}^0 и i_2 -ми y_{i_2, s_q}^0 , \widehat{y}_{i_2, s_q}^0 переменными (результативные признаки соответственно фактические и ожидаемые (нормативные), значения последних в период времени t , определяются с помощью производственной функции (ПФ)) ($i_1, i_2 = 1, \dots, I$), I – число результативных признаков подсистемы k типа s_q ; индекс «0» показывает, что значения переменных приведены к шкале от 0 до 1 посредством преобразования стандартизованных (центрированных и нормированных) величин абсолютных значений:

$$\begin{aligned} & (\cdot)_{i,k,s_q}^0(t) = \\ & = \frac{(\cdot)_{i,k,s_q}^*(t) - \min\{y_{i,k,s_q}^*(t), \widehat{y}_{i,k,s_q}^*(t)\}}{\max\{y_{i,k,s_q}^*(t), \widehat{y}_{i,k,s_q}^*(t)\} - \min\{y_{i,k,s_q}^*(t), \widehat{y}_{i,k,s_q}^*(t)\}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $(\cdot) - y_i, \widehat{y}_i$; «*» – означает, что переменные (будем считать их случайными величинами) центрированы и нормированы:

$$(\cdot)_{k,s_q}^*(t) = \frac{(\cdot)_{k,s_q}(t) - M(y_{s_q})}{\sigma(y_{s_q})}, \quad (3)$$

где $M(y_{s_q})$, $\sigma(y_{s_q})$ – среднее и стандартное отклонение объединенной по k и t выборки.

Если значение показателя больше или равно единице, то функционирование подсистемы можно считать удовлетворительным. Аналогично (1) строятся и частные показатели результативности, определяемые отношением приведенных к шкале от 0 до 1 фактических и нормативных значений (вычисленных по производственной функции (ПФ)) в соответствии с правилами (2) и (3).

Выражение, стоящее в знаменателе (1), есть агрегированная производственная функция (АПФ), образованная квадратичной сверткой производственных функций результативных признаков i_1, i_2 и соответствующей матрицы корреляций.

Связь между значениями результативных признаков и факторами можно представить как [25]:

$$y_{k,i}(t) = f_i(C_{i,j}, x_{k,i,j}(t)) + \varepsilon_{k,i}(t), \quad (4)$$

где k – номер элемента совокупности ($k = 1, \dots, K \in N$);

t – время наблюдения k -того объекта совокупности ($t = 1, \dots, T \in N$);

i – индекс случайной величины ($i = 1, \dots, m \in N$);

$C_{i,j}$ – параметры функции $f_i(\cdot) = \widehat{y}_i$;

$\varepsilon_{k,i}$ – значения стохастической случайной составляющей $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma_{\varepsilon_i}^2)$:

$$\begin{aligned} f_{P,i}(\varepsilon_i) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_{\varepsilon_i}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon_i^2}{2 \cdot \sigma_{\varepsilon_i}^2}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_{y_i}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(y_i - \widehat{y}_i)^2}{2 \cdot \sigma_{y_i}^2}\right]. \quad (5) \end{aligned}$$

С целью устранения влияния единиц измерения будем рассматривать стандартизованные случайные величины ε_i^* с совместной плотностью распределения вероятностей:

$$\begin{aligned} & f_p(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_m^*) = \\ & = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{m/2} \cdot \sqrt{\Delta_r}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2 \cdot \Delta_r} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} \cdot \varepsilon_i^* \cdot \varepsilon_j^*\right], \quad (6) \end{aligned}$$

где Δ_r , A_{ij} – соответственно определитель и алгебраические дополнения корреляционной матрицы $\|r_{ij}\|$, элементами которой являются парные коэффициенты корреляции; $\varepsilon_i^* = (y_i^* - \widehat{y}_i^*)^2 / (2 \cdot \sigma_{y_i}^2)$.

Тогда плотность распределения вероятностей случайной величины ε^* – агрегированных случайных величин – будет определяться как:

$$f_p(\varepsilon^*) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{m/2} \cdot \sqrt{\Delta_r}} \times \int \dots \int_D \exp\left[-\frac{1}{2 \cdot \Delta_r} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij} \cdot \varepsilon_i^* \cdot \varepsilon_j^*\right] dD, \quad (7)$$

где область интегрирования D зависит от комбинации ε_i^* .

Будем рассматривать D в виде квадратичной свертки в двух вариантах:

$$(y - \bar{y})^2 = \left(\begin{array}{l} \sqrt{\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m r_{i_1 i_2} \cdot y_{i_1}^* \cdot y_{i_2}^*} - \\ - \sqrt{\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \hat{r}_{i_1 i_2} \cdot \hat{y}_{i_1}^* \cdot \hat{y}_{i_2}^*} \end{array} \right)^2 \leq (\varepsilon^*)^2, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{ij} \cdot \varepsilon_i^* \cdot \varepsilon_j^* \leq (\varepsilon^*)^2. \quad (9)$$

Соотношение (8) соответствует разности числителя и знаменателя выражения (1), используемого для расчета интегрального показателя результативности.

Для упрощения вычислений необходимо квадратичную форму привести к каноническому виду посредством вычисления собственных чисел и собственных векторов, либо воспользоваться методом Лагранжа.

Для двумерного случая получено аналитическое выражение плотности распределения вероятностей [25]. Для трехмерного случая выражение плотности может быть представлено в квадратурах в сферической системе координат [28]:

$$f_p(\varepsilon^*) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{3/2} \cdot \Delta} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\varepsilon^*)^2 \cdot \sin \theta \times \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\varepsilon^*)^2 \cdot (c_{11} \cdot \cos^2 \phi \cdot \sin^2 \theta + c_{22} \cdot \sin^2 \phi \cdot \sin^2 \theta + c_{22} \cdot \cos^2 \theta + c_{12} \cdot \sin 2\phi \cdot \sin^2 \theta + c_{13} \cdot \cos \phi \cdot \sin 2\theta + c_{23} \cdot \sin \phi \cdot \sin 2\theta)\right] d\theta d\phi, \quad (10)$$

где $c_{11} = K_{11}$;

$$c_{22} = \frac{1}{K_{33} \cdot \Delta} \cdot (K_{11} \cdot r_{12}^2 + K_{22} - 2 \cdot K_{12} \cdot r_{12});$$

$$c_{33} = \frac{1}{K_{33}} \cdot (r_{12} \cdot K_{23} + r_{13} \cdot K_{33}) \cdot (K_{11} \cdot r_{12} \cdot K_{23} + K_{11} \cdot r_{13} \cdot K_{33} - 2 \cdot K_{12} \cdot K_{23} - 2 \cdot K_{13} \cdot K_{33}) + K_{33}^2 + 2 \cdot K_{23}^2 + \frac{K_{22} \cdot K_{23}^2}{K_{33}};$$

$$c_{12} = \frac{1}{\sqrt{K_{33} \cdot \Delta}} \cdot (-K_{11} \cdot r_{12} + K_{12}); \quad (11)$$

$$c_{13} = \frac{1}{\sqrt{K_{33}}} \cdot (-K_{11} \cdot r_{12} \cdot K_{23} - K_{11} \cdot r_{13} \cdot K_{33} + K_{12} \cdot K_{23} + K_{13} \cdot K_{33});$$

$$c_{23} = \frac{1}{K_{33} \cdot \sqrt{\Delta}} \cdot (K_{11} \cdot r_{12} \cdot (r_{12} \cdot K_{23} + r_{13} \cdot K_{33}) + K_{22} \cdot K_{23} - K_{12} \cdot (2 \cdot r_{12} \cdot K_{23} + r_{13} \cdot K_{33}) - r_{12} \cdot K_{13} \cdot K_{33} + K_{23} \cdot K_{33});$$

$K_{ij}^{-1} = A_{ij} / \Delta$ – элементы обратной матрицы ковариаций.

В первом случае параметры агрегированной производственной функции $C_{i,j}^{*[\text{part}]}$ могут быть определены посредством МНК (OLS) или ММП (MLE), примененных для каждой из рассматриваемых ПФ $f_i(\cdot) = \bar{y}_i$. Во втором случае параметры АПФ находятся с помощью MLE для плотности вида (7) с функций правдоподобия $\ln L(y^* | C_{i,j}^*, x_{i,j}^*(t), \sigma_{y^*})$:

$$\ln L(y^* | C_{i,j}^*, x_{i,j}^*(t), \sigma_{y^*}) = \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T f(y^* | C_{i,j}^*, x_{i,j}^*(t), \sigma_{y^*}) \rightarrow \max. \quad (12)$$

Максимум (12) определяется по $C_{i,j}^*$ (параметры стандартизованной i -той ПФ) с ограничениями вида:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T (\varepsilon_k^*(t))^2 \leq \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T (\varepsilon_k^*(t))_{[\text{part}]}^2, \quad (13)$$

где $\varepsilon_k^*(t)$ – значения случайной величины ε^* , вычисленные для $C_{i,j}^*$, определенных по (12);

[part] (partial) – значения случайной величины, рассчитанные с использованием $C_{i,j}^{*[\text{part}]}$.

Представленный метод позволяет уточнить параметры АПФ посредством решения задачи оптимизации, при совместном поиске коэффициентов моделей, что дает возможность повысить достоверность оценок при построении нормативных значений результатов функционирования подсистемы СЭС.

2. Концептуальная схема и алгоритм реализации метода

Для поиска первоначальных значений параметров моделей используется программный комплекс «ЭФРА», который позволяет найти коэффициенты

и провести ряд статистических тестов, обосновывающих возможность применения моделей для разработки нормативов или прогноза, в том числе оценку значимости модели (по критерию Фишера), оценку значимости параметров моделей (критерий Стьюдента), проверку на отсутствие гетероскедастичности (по коэффициенту ранговой корреляции Спирмена).

Концептуальная схема метода для трехмерного случая представляет собой пять обобщенных блоков (рис. 1), которые реализуют соответствующий алгоритм в программном проекте (модуле) на языке программирования с открытым исходным кодом Python [29].

Для работы программного модуля необходимо подключение дополнительных библиотек Python: numpy, pandas, scipy, matplotlib, ornpyxl и datetime.

Базовый файл main.py подгружает дополнительные модули, а также содержит первоначальные параметры моделей для запуска соответствующих блоков алгоритма.

Первый блок предусматривает загрузку данных и первоначальных значений параметров моделей. С этой целью разработан файл InputData.py, содержащий класс InputData, в котором осуществляется загрузка данных из специальным образом сформированного файла статистических данных формата *.xlsx с полями названий элементов, периодов оценки, признаков. Класс, как и другие классы проекта, содержит функцию __init__(), содержащую переменные данных и количество наблюдений. В функцию datainput передаются параметры начального и конечного периода оценки, названия результативного и факторных признаков. По входным параметрам осуществляется выборка из файла данных.

Второй блок обеспечивает выполнение следующих функций, включенных в файл Models.py с одноименным классом Models.

1. Формирование степенных мультипликативных моделей ПФ согласно (4) в абсолютном и ло-

гарифмированном видах посредством добавления в текст программы соответствующих функций def с передаваемыми значениями факторов и коэффициентов моделей: def func_abs(self, y, x1, x2, a0_3), def func_std(self, x1, x2, a0_3), где y – результативный признак, x1, x2 – факторные признаки, a0_3 – коэффициенты моделей.

2. Построение агрегированных случайных величин – остатков агрегированной АПФ, определенных соотношением (8) – 2 функции integr_std(self, y, y_teor, m = 3) и residuals(self, y, y_teor) и формулой (9) – 1 функция def integr_std_y_y_teor(self, y, y_teor, m = 3). Здесь m = 3 – число передаваемых переменных – результативных признаков; y, y_teor – фактические и рассчитанные по моделям ПФ значения результативных признаков, представленных в виде массива для трехмерного случая (содержит три переменных). Функции, помимо значений агрегированной случайной величины, возвращают сумму квадратов остатков и матрицу корреляций $\|r_{ij}\|$ для случая, когда значения элементов $\|r_{ij}\|$ вычисляются на каждой итерации решения задачи оптимизации по набору изменяемых параметров модели a0_3, соответствующих $C_{i,j}$.

3. Функция res_test(self, mu, sigma, size, m = 3) генерирует набор нормально распределенных случайных величин, со средним mu, стандартным отклонением sigma и объема size.

Третий блок представлен файлом DistributionDensity.py, содержащим класс DistributionDensity, назначение которого – вычислять плотность распределения трехкомпонентной агрегированной случайной величины. Данный модуль содержит следующие функции.

1. Подынтегральная функция def UnderIntFunctionOnQuadraticForm(self, theta1, theta2, r_3, z), которая соответствует формулам (10) и (11) с переменными углами theta1, theta2 и z – значениями агрегированной случайной величины ε^* .

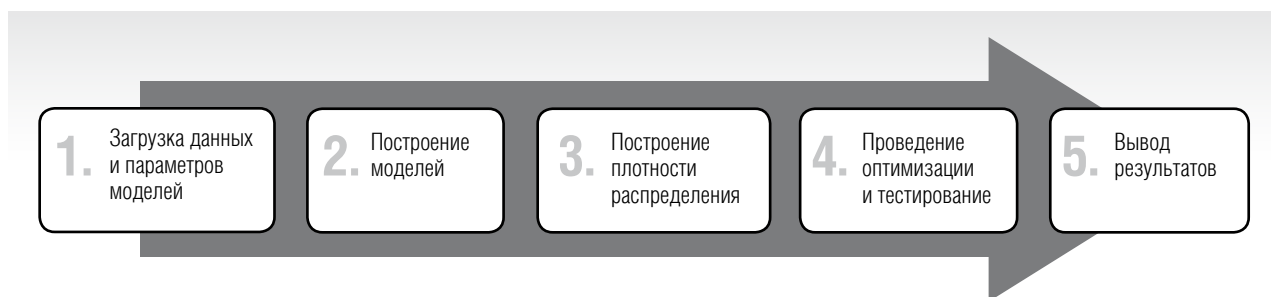


Рис. 1. Концептуальная обобщенная схема алгоритма.

2. Подынтегральная функция `def UnderIntFunctionLA(self, theta1, theta2, r_3, z, m = 3)`, позволяющая преобразовать подынтегральное выражение в формуле (7) к каноническому виду посредством вычисления собственных чисел и собственных векторов корреляционной матрицы $\|r_{ij}\|$. Функция может быть расширена на случай m переменных за счет встроеного цикла формирования двойной суммы в (7).

3. Функция `Density_3var(self, bins, r_3, t = 1)` вычисляет двойной интеграл в (7), для значений $bins - \varepsilon^*$. Переменная t , которая может быть равна 0 или 1, отвечает за выбор подынтегральной функции `UnderIntFunctionQuadraticForm` или `UnderIntFunctionLA`.

Четвертый модуль представлен двумя файлами: `ObjectiveFunction.py` и `TestFunction.py`.

Первый файл содержит в себе класс `ObjectiveFunction`, предназначенный для формирования целевой функции `objective_func_SearchParameters_3var(a)` и системы ограничений: а) верхние и нижние границы изменения параметров a – параметров агрегированной производственной функции lb и ub , значения которых вычисляются с помощью «ЭФРА»; б) система нелинейных ограничений, соответствующих выражению (13) – `definequality_constraint_3var(a)`. Причем вычисление правой части неравенства (13) вынесено в отдельную функцию `f01()` с целью сокращения времени выполнения алгоритма, то есть однократного расчета `f01()` и передачи результата в систему нелинейных ограничений (13).

Второй файл содержит класс `TestFunction`, в котором представлены 2 функции тестирования: а) `def hi2(self, res, alfa = 0,05)` проверяет ряд остатков res (ε^*) на соответствие нормальному закону распределения по критерию χ^2 ; б) `hi2_plotn_3var(self, res, r_3, alfa = 0,05)` проверяет ряд остатков res (ε^*) на соответствие закону с плотностью распределения вероятностей (7) по критерию χ^2 . Переменная $alfa$ задает уровень значимости критерия. Разбиение выборки на интервалы для подсчета частот распределения может быть осуществлено автоматически либо с использованием формулы Стерджесса ($n = 1 + np.trunc(3,322 * np.log10(n_res))$), `np.trunc` отсекает дробную часть, `np.log10` – десятичный логарифм, n_res – число наблюдаемых значений ε^* .

Пятый блок вывода реализуется посредством главного файла `main.py`, в котором запускаются процедуры оптимизации, тестирования и построения графиков частот ε^* , нормального распределения и распределения с плотностью (10).

Для проведения оптимизации применяется встроенная функция `minimize` из библиотеки `Scipy`. В качестве базового алгоритма используется метод `SLSQP` (Sequential Least Squares Programming) [30]. Результаты оптимизации выводятся в консоль и в текстовый файл `*.txt`. Модели со скорректированными параметрами тестируются на соответствие нормальному закону и закону с плотностью, описываемой формулой (7), и вводятся в консоль.

Архитектура проекта представлена на *рис. 2*.

Search	venv...
Parameters	DataImport_BD.xlsx
	DataInput.py
	DistributionDensity.py
	main.py
	Models.py
	ObjectiveFunction.py
	Results.txt
	TestFunction.py

Рис. 2. Архитектура проекта.

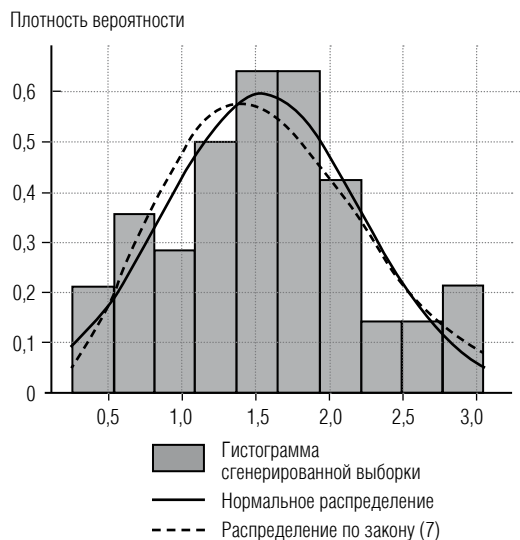
В директории `venv` устанавливаются необходимые библиотеки Python. При этом проект изолируется от остальных проектов за счет создания собственного виртуального окружения.

Таким образом, разработанный модуль Python в сочетании с программным комплексом «ЭФРА» позволяет: скорректировать параметры производственных функций и агрегированной производственной функции, протестировать гипотезу о соответствии ряда остатков заданным законам распределения с помощью критерия χ^2 на базе разработанного метода оценки параметров АПФ для трехмерного случая.

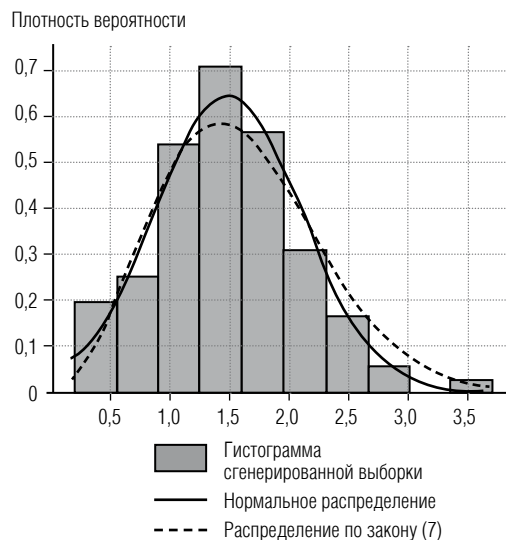
3. Результаты реализации метода оценки параметров трехкомпонентной АПФ на примере регионов ЦФО

3.1. Тестирование на модельных данных

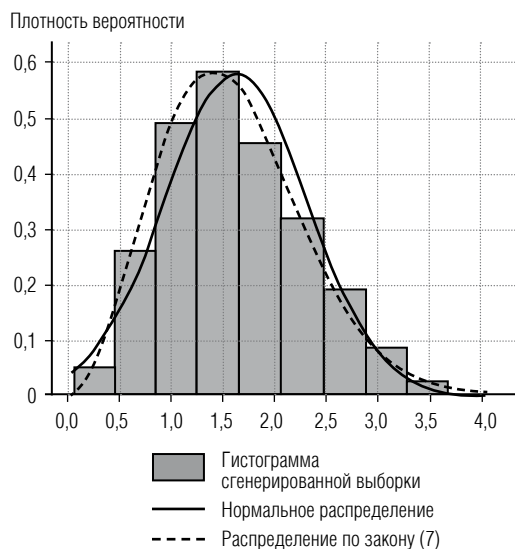
Первоначально для тестирования работы алгоритма и проверки гипотезы о соответствии агрегированной случайной величины по (9) закону распределения с плотностью, определяемой соотношением



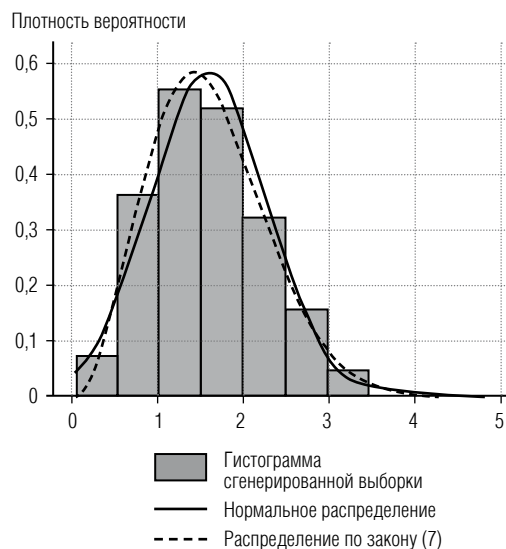
а) Остатки (Звар): p -value = 0,688 (нормальное распределение), p -value = 0,091 (распределение по закону (7)).



б) Остатки (Звар): p -value = 0,351 (нормальное распределение), p -value = 0,316 (распределение по закону (7)).



в) Остатки (Звар): p -value = 0,000 (нормальное распределение), p -value = 0,608 (распределение по закону (7)).



г) Остатки (Звар): p -value = 0,000 (нормальное распределение), p -value = 0,905 (распределение по закону (7)).

Рис. 3. Частотная диаграмма результатов оценки трехкомпонентной случайной величины с $\varepsilon_i \sim N(0; 1)$; а) 50 наблюдений, б) 100 наблюдений, в) 1000 наблюдений, г) 10000 наблюдений; p -value – уровень значимости по критерию χ^2 ; число интервалов 10.

(7), были сгенерированы три нормально распределенные случайные величины $\varepsilon_i \sim N(0; 1)$ объема 50, 100, 1000 и 10000 наблюдений (рис. 3).

Из рисунка 3 видно, что при увеличении числа наблюдений уровень значимости для нормального закона падает, а для закона с плотностью (7), наоборот, увеличивается. При этом для выборки

в 50 наблюдений распределение агрегированной случайной величины соответствует и распределению с плотностью (7) и значимо на уровне 0,091. То есть на выборках объема 50 и 100 наблюдений нельзя отвергать гипотезы о соответствии как нормальному распределению, так и распределению с плотностью (7).

3.2. Построение моделей для проектной подсистемы СЭС

В соответствии с пространственно-временной классификацией Г.Б. Клейнера, социально-экономическая система включает четыре подсистемы: объектного, средового, процессного и проектного типа, взаимодействие между которыми формирует уровень системной сбалансированности экономики [16]. При этом проектная подсистема характеризуется объемом валового регионального продукта (ВРП) по разделам F (строительство), G (оптовая и розничная торговля), K (финансовая деятельность) по ОКВЭД 2, ранее по ОКВЭД 1 разделы обозначались как F, G и J соответственно. В этом смысле проектная подсистема является трехкомпонентной и может служить объектом оценки с применением разработанного метода.

Основываясь на ранее проведенных исследованиях [31], в качестве функциональной формы моделей были выбраны степенные мультипликативные модели, связывающие объем ВРП по разделам F(F), G(G), K(J) со стоимостью основных производственных фондов (всего для раздела K(J), для разделов F(F) и G(G)), среднегодовой численностью занятых (для разделов F(F) и G(G)) и среднегодовой численностью населения (для раздела K), представленные формулой (14) и в линеаризованной форме соотношением (15):

$$\hat{y}_i = C_{i,0} \cdot x_{i,1}^{C_{i,1}} \cdot x_{i,2}^{C_{i,2}}, \quad (14)$$

$$\ln(\hat{y}_i) = \ln(C_{i,0}) + C_{i,1} \cdot \ln(x_{i,1}) + C_{i,2} \cdot \ln(x_{i,2}). \quad (15)$$

Базой для формирования моделей послужили открытые данные Росстата для 17 областей Центрального федерального округа (без Москвы) за период с 2007 по 2020 гг. [32]. Все стоимостные показатели были скорректированы на уровень инфляции и приведены к уровню 2007 года по формуле:

$$(\cdot)_t = (\cdot) / \prod_{i=2}^t (1 + \pi_i / 100). \quad (16)$$

Здесь π_i – уровень инфляции в i периоде ($i = 2$ соответствует 2008 году).

Предварительные результаты показали значимость коэффициентов моделей и коэффициента детерминации R^2 . Однако при дальнейшем тестировании моделей и их проверки на адекватность по ряду остатков (случайность, равенство 0 математического ожидания, наличие автокорреляции, соответствие нормальному закону распределения,

тест на гомоскедастичность) объем выборки пришлось уменьшить до 2018–2020 гг. (раздел F(F)) и 2015–2020 гг. (разделы G(G) и K(J)). Результаты оценки параметров представлены в *таблице 1*.

Используя представленный метод, были оценены параметры АПФ и ПФ в двух вариантах: агрегированная случайная величина определялась по формулам (9) и (10) с плотностью распределения (7) и (11), функцией правдоподобия (13) и ограничениями (14). Объем объединенной выборки за период 2018–2020 годы составил 51. При этом алгоритм, по которому вычислялась плотность распределения с использованием собственных чисел и собственных векторов для преобразования области интегрирования к каноническому виду (функция UnderIntFunctionLA), оказался почти в три раза медленнее, чем алгоритм, в котором плотность распределения определялась в квадратурах (функция UnderIntFunctionQuadraticForm), что привело к выводу о целесообразности использования метода Лагранжа вместо первого варианта при преобразовании переменных к сферическим координатам с максимально возможным аналитическим описанием подынтегрального выражения плотности распределения агрегированной случайной величины.

Результаты оценки моделей представлены в *таблице 2*.

Результаты оценок моделей, представленных в *таблице 2*, показывают, что модели остались адекватными после корректировки их параметров, как по первому, так и по второму варианту.

Результаты оценки агрегированной случайной величины и значений функции правдоподобия представлены в *таблице 3*.

Из *таблицы 3* видно, что значение функции правдоподобия после оптимизации увеличилось на 4,809% и 7,437% соответственно, что подтверждает гипотезу об увеличении достоверности проводимых оценок с использованием АПФ со скорректированными после оптимизации параметрами. То есть, метод дает возможность установить более обоснованные нормативы для результатов функционирования подсистем СЭС, в частности для трехэлементных подсистем. Однако достоверность оценок на соответствие агрегированной случайной величины рассматриваемым законам распределения уменьшается, хотя и остается значимой для случая γ). При использовании ε^* , рассчитанной по формуле (8), агрегированная случайная величина ближе к нормальному закону, при использовании (9) – к

Таблица 1.

Основные статистические характеристики оцененных моделей

Модель	C_0	C_1	C_2	R^2	v	rnd	M(e)	DW	W	r_{x_1} / r_{x_2}
F(F)	93,306	0,248	0,711	0,961	48	26/31	1,182	1,809	0,973	0,141 0,145
p-value	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,050	0,243	0,050	0,282	0,322 0,310
G(G)	10,365	0,415	0,838	0,961	99	47/51	1,744	1,953	0,097	0,098 0,222
p-value	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,050	0,084	0,050	0,027	0,326 0,025
K(J)	0,007	0,264	1,077	0,928	99	58/68	1,543	1,944	0,973	0,085 0,099
p-value	0,000	0,001	0,000	0,00	–	0,050	0,126	0,050	0,035	0,395 0,319

Примечание: буквенные обозначения в первом столбце – модель для раздела по ОКВЭД 2; () – ОКВЭД 1; p-value – уровень статистической значимости; C_i – значения коэффициентов моделей; R^2 – коэффициент детерминации; v – число степеней свободы; rnd – критическое (для уровня значимости 0,05) и расчетное количество поворотных точек (проверка на случайность ряда остатков); M(e) – t-статистика (проверка равенства 0 математического ожидания ряда остатков); DW – критерий Дарбина–Уотсона (проверка отсутствия автокорреляции ряда остатков, значим на указанном уровне); W – критерий Шапиро–Вилка (проверка на нормальность ряда остатков); r_{x_i} – t-статистика по коэффициенту ранговой корреляции Спирмена фактора x_i (тест на гомоскедастичность). Ряд остатков строился для линеаризованных моделей.

Таблица 2.

Основные статистические характеристики оцененных моделей
(агрегированная оценка)

Модель	C_0	C_1	C_2	R^2	v	rnd	M(e)	DW	W	r_{x_1} / r_{x_2}
F(F) ^a	90,101	0,253	0,708	0,960	48	26/31	1,241	1,810	0,972	0,140 0,145
p-value ^a	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,050	0,220	0,050	0,275	0,327 0,310
F(F) ^b	97,373	0,241	0,715	0,961	48	26/31	1,418	1,869	0,973	0,155 0,151
p-value ^b	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,050	0,162	0,050	0,291	0,277 0,289
G(G) ^a	11,961	0,347	0,945	0,970	99	58/57	1,847	1,979	0,969	0,125 0,317
p-value ^a	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,010	0,068	0,050	0,017	0,212 0,001
G(G) ^b	9,578	0,381	0,921	0,974	99	58/59	1,759	1,988	0,973	0,176 0,346
p-value ^b	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,050	0,082	0,050	0,037	0,077 0,000
K(J) ^a	0,008	0,283	1,035	0,927	99	58/66	1,355	1,967	0,973	0,072 0,064
p-value ^a	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,050	0,178	0,050	0,037	0,473 0,520
K(J) ^b	0,0245	0,181	1,085	0,900	99	58/65	0,607	1,994	0,972	0,068 0,002
p-value ^b	0,000	0,039	0,000	0,000	–	0,050	0,545	0,050	0,030	0,494 0,981

Примечание: а) агрегированная случайная величина определялась по формуле (8); б) по формуле (9).

Результаты оценки агрегированной случайной величины

Характеристика / АПФ	ε^{*a}	$\varepsilon^{*б}$	$\varepsilon^{*в}$	$\varepsilon^{*г}$
$\ln(L(\varepsilon^*))$	-69,147	-66,049	-65,821	-61,136
$\Delta\ln(L(\varepsilon^*))$	–	–	3,325 (4,809%)	4,912 (7,437%)
$\chi^2_{\text{норм}}$	10,477	16,800	10,079	39,352
p-value _{норм}	0,063	0,005	0,073	0,000
χ^2_{agg}	169,125	7,841	168,701	12,848
p-value _{agg}	0,000	0,165	0,000	0,025

Примечание: $\ln(L(\varepsilon^*))$ – значение функции правдоподобия; $\Delta\ln(L(\varepsilon^*))$ – изменение функции правдоподобия; $\chi^2_{\text{норм}}$ – значение критерия χ^2 на соответствие нормальному закону; χ^2_{agg} – значение критерия χ^2 на соответствие закону с плотностью (7); p-value_(норм, agg) – уровни статистической значимости соответственно $\chi^2_{\text{норм}}$ и χ^2_{agg} ; а) ε^* , рассчитанная по формуле (8) до оптимизации; б) ε^* , рассчитанная по формуле (9) до оптимизации; в) и г) ε^* , рассчитанные по формулам (8) и (9) после оптимизации соответственно.

закону с плотностью (7). Эти результаты согласуются с выводами, полученными ранее для двухкомпонентной агрегированной случайной величины [25].

Диаграммы агрегированной случайной величины, полученной по формулам (8) и (9) с p-value до и после оптимизации, представлены на *рисунке 4 а), б), в), г)* соответственно.

Полученные результаты оценки параметров ПФ и АПФ были использованы для расчета частных и интегрального показателя результативности функционирования проектной подсистемы областей ЦФО за 2018–2020 годы в трех вариантах. Результаты расчета представлены на внешнем ресурсе¹.

На *рисунке 5* отражены результаты расчета показателей для Тульской области в 2020 году.

Как видно из *рисунка 5*, значения показателей, вычисленных по различным вариантам, близки друг другу, и в первом приближении для оценки проектной подсистемы можно использовать оценки по параметрам, вычисленным для каждого из разделов отдельно. В случае необходимости установления более достоверных нормативов для подсистемы целесообразно корректировать параметры АПФ и ПФ с использованием плотности распреде-

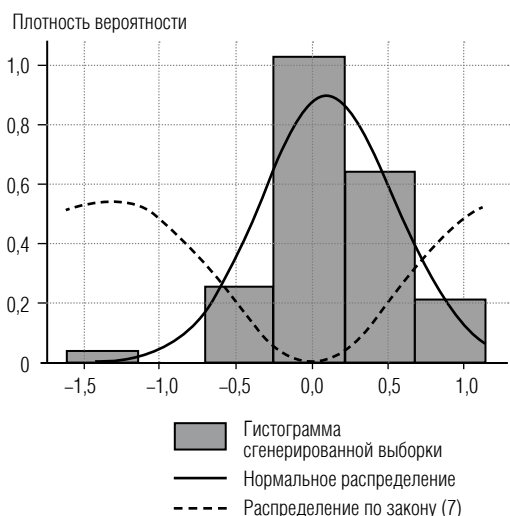
ления вида (10), поскольку составленная на ее основе функция правдоподобия максимальна среди остальных вариантов.

Заключение

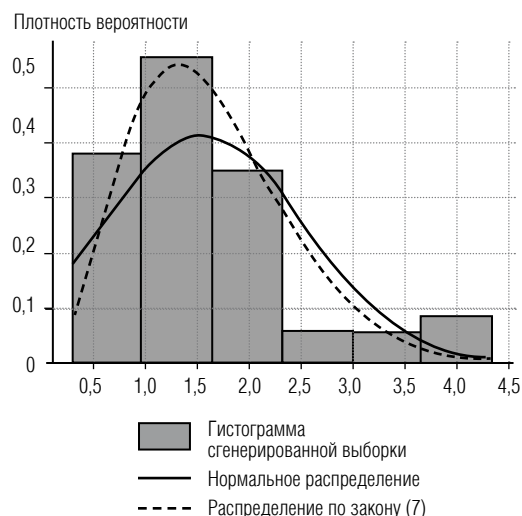
В настоящей статье представлен метод оценки параметров агрегированной производственной функции, используемой для расчета нормативов результатов функционирования подсистем СЭС, реализованный для трехкомпонентной АПФ. Отличием метода является совместное получение параметров ПФ элементов СЭС, обеспечивающее согласованность ПФ в рамках одной подсистемы.

Применение метода для областей ЦФО с использованием разработанного и протестированного программного проекта Python позволило скорректировать параметры ПФ и АПФ и получить статистически адекватные модели, которые могут быть использованы для построения нормативов элементов проектных подсистем и подсистем в целом для областей ЦФО. Это подтвердило поставленную ранее гипотезу о возможности использования метода для трехкомпонентных подсистем.

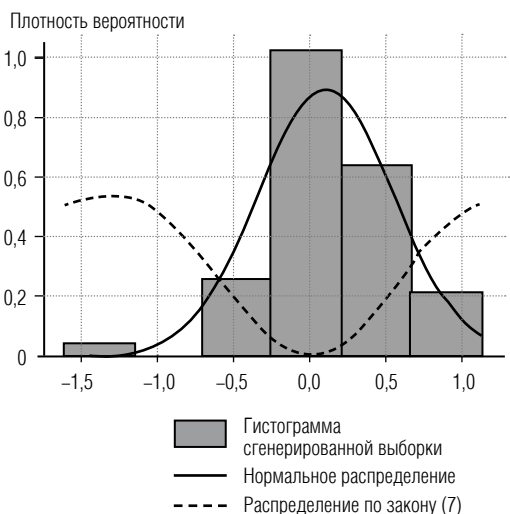
¹ Значения частных и интегральных показателей результативности для областей ЦФО за 2018–2020 годы [Электронный ресурс]: <https://disk.yandex.ru/i/NWOKIpcJG-sULA>



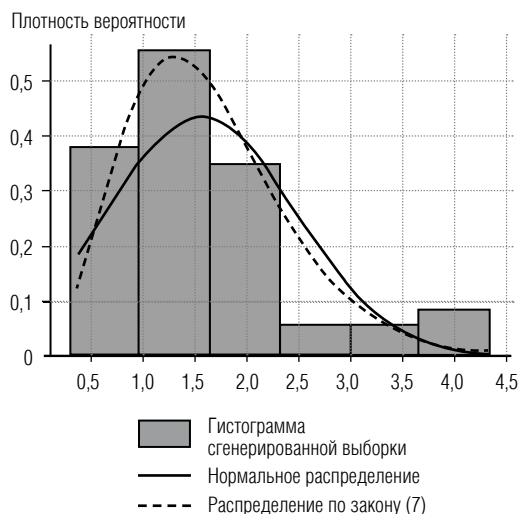
а) Остатки (Звар): p -value = 0,063 (нормальное распределение), p -value = 0,000 (распределение по закону (7)).



б) Остатки (Звар): p -value = 0,005 (нормальное распределение), p -value = 0,165 (распределение по закону (7)).



в) Остатки (Звар): p -value = 0,073 (нормальное распределение), p -value = 0,000 (распределение по закону (7)).



г) Остатки (Звар): p -value = 0,000 (нормальное распределение), p -value = 0,025 (распределение по закону (7)).

Рис. 4. Частотная диаграмма результатов оценки трехкомпонентной случайной величины с ε , а) формула (8) до оптимизации, б) формула (9) до оптимизации, в) и г) формулы (8) и (9) после оптимизации; p -value – уровень значимости по критерию χ^2 ; число интервалов 6 (рассчитано по формуле Стерджесса), объем выборки 51.

Результаты оценки функционирования областей ЦФО за 2018–2020 годы с помощью частных и интегральных индикаторов могут быть полезны региональным органам управления для последующего анализа и синтеза решений, которые дают возможность обеспечить соответствие фактических и нормативных значений результативных признаков с заданной степенью точности за счет изменения и

(или) интенсификации использования факторов, входящих в разработанные модели. ■

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-20061, <https://rscf.ru/project/22-28-20061/> и Тульской области.

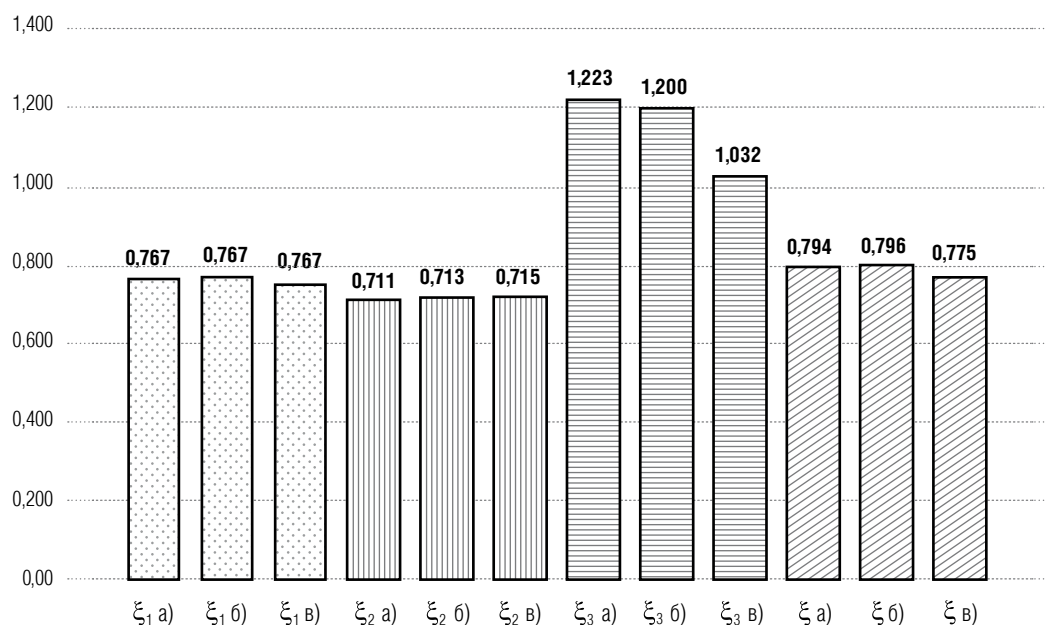


Рис. 5. Значения показателей результативности для Тульской области в 2020 году:
 ξ_1, ξ_2, ξ_3 – частные показатели результативности для разделов F(F), G(G) и K(J) по ОКВЭД 2 (ОКВЭД 1);
 ξ – интегральный показатель результативности проектной подсистемы;
 а) параметры ПФ определялись отдельно;
 б) для оценки параметров АПФ и ПФ использовалась формула (8),
 в) использовалась формула (9).

Литература

1. Выявление особенностей стратегического развития регионов на основе статистического анализа индикаторов / Д.А. Масленников и [др.] // Экономика региона. 2019. Т. 15. № 3. С. 707–719. <https://doi.org/10.17059/2019-3-7>
2. Локосов В.В., Рюмина Е.В., Ульянов В.В. Качество населения и региональная экономика: прямые и обратные связи // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2018. Т. 11. № 1. С. 32–42. <https://doi.org/10.15838/esc/2018.1.55.2>
3. Третьякова Е.А., Осипова М.Ю. Оценка показателей устойчивого развития регионов России // Проблемы прогнозирования. 2018. № 2 (167). С. 24–35.
4. Mishra S.K. A brief history of production functions // The UIP Journal of Managerial Economics, UIP Publications. 2010. Vol. 8. No. 4. P. 6–34.
5. Палаш С.В. Структурная сбалансированность экономики: государственные программы промышленного развития в Российской Федерации // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Экономические науки. 2017. Т. 10. № 1. С. 53–72. <https://doi.org/10.18721/JE.10105>
6. Кутышкин А.В., Орлова Д.С. Диагностика устойчивости развития региональных социально-экономических систем на примере Ханты-Мансийского автономного округа – Югры // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2019. Т. 19. № 2. С. 103–116. <https://doi.org/10.14529/ctcr190209>
7. Sun X., Liu X., Li F., Tao Y., Song Y. Comprehensive evaluation of different scale cities sustainable development for economy, society, and ecological infrastructure in China // Journal of Cleaner Production. 2017. Vol. 163. P. 329–337. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2015.09.002>
8. Кривоножко В.Е., Лычев А.В. Анализ деятельности сложных социально-экономических систем. М.: Макс Пресс, 2010.
9. Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units // European Journal of Operational Research. 1978. Vol. 2. No. 6. P. 429–444.
10. Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения / В.Л. Макаров и [др.] // Экономика региона. 2014. № 4. С. 9–30. <https://doi.org/10.17059/2014-4-1>

11. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Индикаторы экономического развития в базисе характеристик региональной дифференциации // Прикладная эконометрика. 2018. № 2 (50). С. 4–22.
12. Виноградова Н.А. Интегральный индекс развития регионов // Региональная экономика: теория и практика. 2016. № 2. С. 68–83.
13. Дмитриев В.В., Календин Н.В. Интегральная оценка состояния региональных социо-эколого-экономических систем и качества жизни населения (на примере субъектов Северо-западного федерального округа России) // Балтийский регион. 2016. Т. 8. № 2. С. 125–140. <https://doi.org/10.5922/2074-9848-2016-2-7>
14. Жгун Т.В., Липатов А.В., Чалов Г.А. О корректности вычислительной задачи построения композитных индексов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15. № 2. С. 441–455. <https://doi.org/10.25559/SITITO.15.201902.441-455>
15. Колесников Н.Г., Толстогузов О.В. Структурные изменения экономики Северо-Запада России: пространственный аспект // Балтийский регион. 2016. Т. 8. № 2. С. 30–47. <https://doi.org/10.5922/2074-9848-2016-2-2>
16. Клейнер Г.Б., Рыбачук М.А. Системная сбалансированность экономики России. Региональный разрез // Экономика региона. 2019. Т. 15. № 2. С. 309–323. <https://doi.org/10.17059/2019-2-1>
17. Dreyer J.K., Schmid P.A. Growth effects of EU and EZ memberships: Empirical findings from the first 15 years of the Euro // Economic Modelling. 2017. Vol. 67. P. 45–54. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2016.09.007>
18. Sayaria N., Saria R., Hammoudehb S. The impact of value added components of GDP and FDI on economic freedom in Europe // Economic Systems. Vol. 42. No. 2. P. 282–294. <https://doi.org/10.1016/j.ecosys.2017.03.003>
19. Charfeddine L., Mrabet Z. The impact of economic development and social-political factors on ecological footprint: A panel data analysis for 15 MENA countries // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2017. Vol. 76. P. 138–154. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.03.031>
20. Lin B., Benjamin I.N. Causal relationships between energy consumption, foreign direct investment and economic growth for MINT: Evidence from panel dynamic ordinary least square models // Journal of Cleaner Production. 2018. Vol. 197. P. 708–720. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.06.152>
21. Zhenhua W., Guangsheng Z. Industrial policy, production efficiency improvement and the Chinese county economic growth // Proceedings of Rijeka Faculty of Economics: Journal of Economics and Business. 2016. Vol. 34. No. 2. P. 505–528. <https://doi.org/10.18045/zbefri.2016.2.505>
22. Афанасьев А.А., Пономарева О.С. Народнoхозяйственная производственная функция России в 1990–2017 гг. // Экономика и математические методы. 2020. Т. 56. № 1. С. 67–78. <https://doi.org/10.31857/S042473880006708-7>
23. Моделирование развития экономики региона и эффективность пространства инноваций/ В.Л. Макаров и [др.] // Форсайт. Т. 10. № 3. С. 76–90. <https://doi.org/10.17323/1995-459X.2016.3.76.90>
24. Comparative analysis of results of assessing the Central Federal District's regions' economic development by using linear and non-linear models / R. Zhukov [et al.] // Statistika: Statistics and Economy Journal. 2019. Vol. 99. No. 3. P. 272–286.
25. Жуков Р.А. Метод оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем на основе агрегированной производственной функции // Экономика и математические методы. 2021. Т. 57. № 3. С. 17–31. <https://doi.org/10.31857/S042473880016428-9>
26. Жуков Р.А. Подход к оценке функционирования иерархических социально-экономических систем и принятию решений на базе программного комплекса «ЭФРА» // Бизнес-информатика. 2020. Т. 14. № 3. С. 82–95. <https://doi.org/10.17323/2587-814X.2020.3.82.95>
27. Жуков Р.А. Социо-эколого-экономические системы: теория и практика. М.: ИНФРА-М, 2019. https://doi.org/10.12737/monography_5b7516626665a8.43347695
28. Жуков Р.А., Козлова Н.О. О плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины для оценки функционирования сложных систем: трехмерный случай // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXI Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы. Тула, 2022. С. 268–270.
29. Язык программирования Python [Электронный ресурс]: <http://python.org> (дата обращения 20.08.2022).
30. Метод SLSQP Python [Электронный ресурс]: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html> (дата обращения 20.08.2022).
31. Zhukov R.A. Model of socio-ecological and economic system: The Central Federal District regions of the Russian Federation // Statistika: Statistics and Economy Journal. 2018. Vol. 98. No. 3. P. 237–261.
32. Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]: <http://www.gks.ru> (дата обращения 20.08.2022).

Об авторах

Жуков Роман Александрович

кандидат физико-математических наук, доцент;

научный сотрудник, доцент кафедры «Математика и информатика», Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, 300012, г. Тула, ул. Оружейная, д. 1-а;

E-mail: pluszh@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2280-307X

Козлова Надежда Олеговна

кандидат технических наук;

старший преподаватель кафедры «Математика и информатика», Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, 300012, г. Тула, ул. Оружейная, д. 1-а;

E-mail: 95kno@mail.ru

ORCID: 0000-0001-6808-2880

Манохин Евгений Викторович

кандидат физико-математических наук, доцент;

доцент кафедры «Математика и информатика», Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, 300012, г. Тула, ул. Оружейная, д. 1-а;

E-mail: emanfinun@mail.ru

ORCID: 0000-0001-6711-3737

Плинская Мария Александровна

студент направления «Бизнес-информатика», Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, 300012, г. Тула, ул. Оружейная, д. 1-а;

E-mail: maria.plinskaya@gmail.com

ORCID: 0000-0002-1307-0935

Construction of an aggregated production function with implementation based on the example of the regions of the Central Federal District of the Russian Federation

Roman A. Zhukov

E-mail: pluszh@mail.ru

Nadezhda A. Kozlova

E-mail: 95kno@mail.ru

Evgeny V. Manokhin

E-mail: emanfinun@gmail.com

Maria A. Plinskaya

E-mail: maria.plinskaya@gmail.com

Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch
Address: 1a, Oruzheynaya Street, Tula 300012, Russia

Abstract

A three-dimensional case is considered on the basis of a method developed for estimating the parameters of the aggregated production function used to calculate dynamic standards and build integral indicators of the performances of the functioning of socio-economic systems. The aggregated production function is determined by the quadratic convolution of the production functions of the results of the functioning of the elements of the subsystem and their correlation matrix. The parameters of the aggregated production function are determined from solving the problem of maximizing the likelihood function of a random variable – the residuals of production functions aggregated according to a similar rule. On the example of a project subsystem within the framework of the Kleiner's spatial-temporal classification of socio-economic systems we obtained adjusted values of the parameters of a function that includes power-law multiplicative models of the relationship between the volume of gross domestic product by region for sections F (construction), G (wholesale and retail trade), K (financial activity) according to NACE 2 and the cost of fixed assets (total for section K, for sections F and G), the average annual number of employees (for sections F and G) and the average annual population (for section K), based on data for 2015–2020 (sections G, K) and 2018–2020 (section F) for the regions of the Central Federal District. The EFRA software package and Python's project were used as tools. The results obtained can be used by regional authorities in assessing the functioning of the regions and the formation of appropriate standards in the short term.

Keywords: socio-economic system, probability distribution density, aggregated production function, model, integral estimation

Citation: Zhukov R.A., Kozlova N.A., Manokhin E.V., Plinskaya M.A. (2022) Construction of an aggregated production function with implementation based on the example of the regions of the Central Federal District of the Russian Federation. *Business Informatics*, vol. 16, no. 3, pp. 7–23. DOI: 10.17323/2587-814X.2022.3.7.23

References

- Maslennikov D.A., Mityakov S.N., Kataeva L.Y., Fedoseeva T.A. (2019) Identification of the characteristics of the regional strategic development based on the indicators' statistical analysis. *Economy of region*, vol. 15, no. 3, pp. 707–719 (in Russian). <https://doi.org/10.17059/2019-3-7>
- Lokosov V.V., Ryumina E.V., Ulyanov V.V. (2018) Population quality and regional economy: direct and indirect correlation. *Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast*, vol. 11, no. 1, pp. 32–42 (in Russian). <https://doi.org/10.15838/esc/2018.1.55.2>
- Tretyakova E.A., Osipova M.Y. (2018) Evaluation of sustainable development indicators for regions of Russia. *Studies on Russian Economic Development*, vol. 29, no. 2, pp. 124–134 (in Russian).
- Mishra S.K. (2010) A Brief History of Production functions. *The UIP Journal of Managerial Economics, UIP Publications*, vol. 8, no. 4, pp. 6–34.
- Palash S.V. (2017) Structural balance of the economy: government programs for industrial development in the Russian Federation. *St. Petersburg State Polytechnic University Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 10, no. 1, pp. 53–72 (in Russian). <https://doi.org/10.18721/JE.10105>
- Kutyshkin A.V., Orlova D.S. (2019) Diagnostics of the sustainable development of regional socio-economic systems on the example of the Khanty-Mansiysk autonomous okrug – Yugra. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, vol. 19, no. 2, pp. 103–116 (in Russian). <https://doi.org/10.14529/ctcr190209>
- Sun X., Liu X., Li F., Tao Y., Song Y. (2017) Comprehensive evaluation of different scale cities sustainable development for economy, society, and ecological infrastructure in China. *Journal of Cleaner Production*, vol. 163, pp. 329–337. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2015.09.002>
- Krivosnozhenko V.E., Lychev A.V. (2010) *Analysis of the activities of complex socio-economic systems*. Moscow: Maks Press (in Russian).
- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. (1978) Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, vol. 2, no. 6, pp. 429–444.
- Makarov V.L., Aivazyan S.H., Afanasiev M.Yu., Bakhtizin A.R., Nanavyan A.M. (2014) The estimation of the regions' efficiency of the Russian Federation including the intellectual capital, the characteristics of readiness for innovation, level of well-being, and quality of life. *Economy of Region*, vol. 4, pp. 9–30 (in Russian). <https://doi.org/10.17059/2014-4-1>
- Aivazian S.A., Afanasiev M.Yu., Kudrov A.V. (2018) Indicators of economic development in the basis of the characteristics of regional differentiation. *Applied Econometrics*, vol. 50, pp. 4–22 (in Russian).
- Vinogradova N.A. (2016) Integrated index of regional development. *Regional Economics: Theory and Practice*, vol. 2, pp. 68–83 (in Russian).

13. Dmitriev V.V., Kaledin N.V. (2016) Russian Northwest: an integral assessment of the conditions of regional social, environmental and economic systems and quality of life. *Baltic Region*, vol. 8, no. 2, pp. 125–140 (in Russian). <https://doi.org/10.5922/2074-9848-2016-2-7>
14. Zhgun T.V., Lipatov A.V., Chalov G.A. (2019) On the correctness of the computational problem of composite indices construction. *Modern Information Technologies and IT-Education*, vol. 15, no. 2, pp. 441–455 (in Russian). <https://doi.org/10.25559/SITITO.15.201902.441-455>
15. Kolesnikov N.G., Tolstoguzov O.V. (2016) Structural changes in the economy of the Russian Northwest: Spatial dimension. *Baltic Region*, vol. 8, no. 2, pp. 30–47 (in Russian). <https://doi.org/10.5922/2074-9848-2016-2-2>
16. Kleiner G.B., Rybachuk M.A. (2019) System balance of the Russian economy: Regional perspective. *Economy of Region*, vol. 15, no. 2, pp. 309–323 (in Russian). <https://doi.org/10.17059/2019-2-1>
17. Dreyer J.K., Schmid P.A. (2017) Growth effects of EU and EZ memberships: Empirical findings from the first 15 years of the Euro. *Economic Modelling*, vol. 67, pp. 45–54. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2016.09.007>
18. Sayaria N., Saria R., Hammoudehb S. (2018) The impact of value added components of GDP and FDI on economic freedom in Europe. *Economic Systems*, vol. 42, no. 2, pp. 282–294. <https://doi.org/10.1016/j.ecosys.2017.03.003>
19. Charfeddine L., Mrabet Z. (2017) The impact of economic development and social-political factors on ecological footprint: A panel data analysis for 15 MENA countries. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 76, pp. 138–154. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.03.031>
20. Lin B., Benjamin I.N. (2018) Causal relationships between energy consumption, foreign direct investment and economic growth for MINT: Evidence from panel dynamic ordinary least square models. *Journal of Cleaner Production*, vol. 197, pp. 708–720. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.06.152>
21. Zhenhua W., Guangsheng Z. (2016) Industrial policy, production efficiency improvement and the Chinese county economic growth. *Proceedings of Rijeka Faculty of Economics: Journal of Economics and Business*, vol. 34, no. 2, pp. 505–528. <https://doi.org/10.18045/zbefri.2016.2.505>
22. Afanasiev A.A., Ponomareva O.S. (2020) The macroeconomic production function of Russia in 1990–2017. *Economics and Mathematical Methods*, vol. 56, no.1, pp. 67–78 (in Russian). <https://doi.org/10.31857/S042473880006708-7>
23. Makarov V., Ayvazyan S., Afanasyev M., Bakhtizin A., Nanavyan A. (2016) Modeling the development of regional economy and an innovation space efficiency. *Foresight and STI Governance*, vol. 10, no. 3, pp. 76–90 (in Russian). <https://doi.org/10.17323/1995-459X.2016.3.76.90>
24. Zhukov R., Kuznetsov G., Gorodnichev S., Manokhin E., Nazyrova E., Melay E. (2019) Comparative analysis of results of assessing the Central Federal District's regions' economic development by using linear and non-linear models. *Statistika: Statistics and Economy Journal*, vol. 99, no. 3, pp. 272–286.
25. Zhukov R.A. (2021) Method for assessing the results of hierarchical socio-economic systems' functioning based on the aggregated production function. *Economics and Mathematical Methods*, vol. 57, no. 3, pp. 17–31 (in Russian). <https://doi.org/10.31857/S042473880016428-9>
26. Zhukov R.A. (2020) An approach to assessing the functioning of hierarchical socio-economic systems and decision-making based on the EFRA software package. *Business Informatics*, vol. 14, no. 3, pp. 82–95 (in Russian). <https://doi.org/10.17323/2587-814X.2020.3.82.95>
27. Zhukov R.A. (2019) *Socio-ecological-economic systems: Theory and practice*. Moscow: INFRA-M (in Russian). https://doi.org/10.12737/monography_5b7516626665a8.43347695
28. Zhukov R.A., Kozlova N.O. (2022) On the probability distribution densities of an aggregated random variable for evaluating the functioning of complex systems: a three-dimensional case. In digest *XXI international conference "Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling, modern problems, applications and problems of history dedicated to the 85th anniversary of the birth of A.A. Karatsuba"*, pp. 268–270 (in Russian).
29. *Programming language Python*. Available at: <http://python.org> (accessed 10 August 2022).
30. *SLSQP Python method*. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html> (accessed 10 August 2022).
31. Zhukov R.A. (2018) Model of socio-ecological and economic system: The central federal district regions of the Russian Federation. *Statistika: Statistics and Economy Journal*, vol. 98, no. 3, pp. 237–261.
32. *Federal State Statistics Service*. Available at: <http://gks.ru> (accessed 10 August 2022).

About the authors

Roman A. Zhukov

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor;

Researcher, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch, 1a, Oruzheynaya Street, Tula 300012, Russia;

E-mail: pluszh@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2280-307X

Nadezhda A. Kozlova

Cand. Sci. (Tech.), Assistant Professor;

Assistant Professor, Department of Mathematics and Informatics, Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch, 1a, Oruzheynaya Street, Tula 300012, Russia;

E-mail: 95kno@mail.ru

ORCID: 0000-0001-6808-2880

Evgeny V. Manokhin

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor;

Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch, 1a, Oruzheynaya Street, Tula 300012, Russia;

E-mail: emanfinun@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6711-3737

Maria A. Plinskaya

Student of the direction “Business Informatics”, Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula Branch, 1a, Oruzheynaya Street, Tula 300012, Russia;

E-mail: maria.plinskaya@gmail.com

ORCID: 0000-0002-1307-0935