

DOI: 10.17323/2587-814X.2023.3.38.52

Применение мер «тяжелохвостости» в задачах анализа финансовых временных рядов

Л.А. Родионова 

E-mail: lrodionova@hse.ru

Е.Д. Копнова 

E-mail: ekopnova@hse.ru

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Адрес: Россия, 109028, г. Москва, Покровский бульвар, д. 11

Аннотация

Важной особенностью при работе с финансовыми данными является тот факт, что остатки GARCH-моделей часто имеют более «толстые хвосты», чем хвосты нормального распределения из-за большого числа «выбросов» в данных, что требует более детального изучения. В статье анализировались и сравнивались куртозис и мера «тяжелохвостости», основанная на квантилях, применительно к задаче выбора спецификации GARCH(1,1)-модели. Были рассмотрены данные индексов Мосбиржи за период 01.04.2019 по 22.02.2022 гг., значения куртозиса которых варьировались от 3 до 52. Как показали эмпирические данные, куртозис очень чувствителен к «выбросам» в данных, что затрудняло предположения относительно вида распределения остатков модели. Рассматриваемый в работе подход на основе меры «тяжелохвостости» позволил обосновать выбор числа степеней свободы t -распределения остатков модели для объяснения «толстых хвостов» в финансовых данных. Было получено, что часто встречающимися являются GARCH(1,1)-модели с $t(5)$ -распределением в остатках.

Ключевые слова: GARCH-модели, куртозис, «тяжелохвостость», t -распределение остатков, степени свободы, толстые хвосты

Цитирование: Родионова Л.А., Копнова Е.Д. Применение мер «тяжелохвостости» в задачах анализа финансовых временных рядов // Бизнес-информатика. 2023. Т. 17. № 3. С. 38–52. DOI: 10.17323/2587-814X.2023.3.38.52

Введение

Известен факт, что многие финансовые временные ряды имеют определенные закономерности: доходности активов слабо стационарны, наблюдается кластеризация волатильности, нормальность распределения отвергается в пользу распределения с толстыми хвостами и др. [1]. Для описания и прогнозирования процессов, обладающих такими свойствами, широко используется класс моделей с условной гетероскедастичностью (ARCH, GARCH-модели), предложенных Энглом [2] и Боллерслевом [3], и их модификации. Важной особенностью при работе с финансовыми данными, которую мы бы хотели подробно рассмотреть в настоящей статье, является тот факт, что остатки ARCH/GARCH моделей имеют более «толстые хвосты», чем хвосты нормального распределения из-за большого числа «выбросов» в данных, и этот факт требует более детального изучения. Для учета «толстых хвостов» в эконометрической практике было предложено несколько альтернативных распределений: t -распределение Стьюдента [3, 4], обобщенное распределение ошибок (GED) [5, 6], скошенное t -распределение Стьюдента [7] и др. Отметим, что возможность выбора t -распределения Стьюдента и GED-распределения при оценивании GARCH-модели реализована в эконометрических пакетах (например, Stata16), что представляет практический интерес в обосновании выбора соответствующего распределения при моделировании и прогнозировании. Предложенные распределения различаются по свойствам, следовательно, предполагаемые распределения не будут одинаково хорошо характеризовать «толщину» хвоста распределения. Возникает *проблема исследования*, как выбрать тип распределения, наилучшим образом характеризующего «тяжелохвостость» распределения. Правильная спецификация GARCH-модели с учетом «тяжелых хвостов» позволяет получить более точные прогнозы доходностей, а инвесторам в дальнейшем — максимальную прибыль, что обуславливает *актуальность* исследования.

Основная *цель* статьи состоит в анализе поведенческой меры «тяжелохвостости», основанной на квантилях, применительно к выбору степеней свободы t -распределения Стьюдента в остатках GARCH-модели. Отметим, что меры «тяжелохвостости» широко обсуждаются в зарубежной литературе и являются альтернативным подходом выбора числа степеней свободы t -распределения. Проверим,

насколько эти меры применимы в эконометрической практике при анализе финансовых данных и сравним с классическим подходом подбора степеней свободы t -распределения на основе сравнения оценок метода максимального правдоподобия.

1. Измерение «тяжелохвостости» распределения

В данном разделе разберем, какие подходы существуют для измерения «тяжести» хвоста распределения. Под «тяжелохвостостью» (heavy-tailedness) распределения для случайной величины (с.в.) X обычно понимают

$$P(|X| > x) \sim \frac{C}{x^\xi}, \quad (1)$$

где константы $C, \xi > 0$, а $f(x) \sim g(x)$, что означает:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Параметр ξ принято называть «*хвостовым индексом*» (tail index) распределения X , который характеризует скорость затухания хвостов степенного распределения (1) и вероятность наблюдения экстремальных значений с.в. Чем больше вероятностная масса в хвостах, тем меньше параметры индекса хвоста, и наоборот [8].

Заметим, что в литературе распределения с «тяжелыми хвостами» разделяют на три подкласса: распределения с «толстым хвостом», распределения с «длинным хвостом» и субэкспоненциальные распределения [9, 10]. Распределение с «толстым хвостом» (fat tail) демонстрирует большую асимметрию или эксцесс по сравнению с нормальным распределением, а в статьях по анализу финансов часто термины «толстый хвост» и «тяжелый хвост» используют как синонимы. В своей работе будем придерживаться термина «тяжелохвостость», а «толстые хвосты» распределения будем рассматривать как частный случай «тяжелых хвостов».

На практике возникает вопрос, как измерить «тяжелохвостость» вообще, и как оценить степень «тяжести» хвоста распределения. Существуют параметрические и непараметрические подходы к оцениванию хвостового индекса [11]. В своей статье проанализируем «тяжелохвостость» в контексте моделирования временных рядов на основе GARCH-моделей. Одной из мер, используемых для выявления «выбросов» во временных рядах является куртозис. В 1905 году Пирсон ввел понятие куртозиса через моменты 4-го порядка:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \quad (2)$$

где μ_4 – центральный момент 4-го порядка;
 σ^4 – квадрат дисперсии;

и классифицировал все распределения как плато-куртические, мезокуртические, или лептокуртические в зависимости от того, насколько «плосковершинным» является распределение по отношению к нормальному [12].

Для нормального распределения $K = 3$, в связи с чем часто используют модифицированный показатель эксцесса (excess kurtosis):

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Далее в статье будет использоваться куртозис K в виде (2). «Толстые хвосты» (как частный случай «тяжелых хвостов») характеризуются избыточным куртозисом $K > 3$, а распределение называют лептокуртическим (leptokurtic) [13].

В данной работе будем сравнивать и исследовать остатки GARCH(1,1)-моделей¹, как часто используемых в эконометрической практике [14]. Напомним определение. Процесс ε_t следует обобщенной модели авторегрессионной условной гетероскедастичности или GARCH(1,1)-модели, если $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, $t = 1, 2, \dots$, где $z_t \sim N(0,1)$ – независимые нормально распределенные случайные величины, а условная дисперсия процесса имеет вид:

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (3)$$

Отметим, что на практике модель (3) лишь отчасти объясняет «толстые хвосты» и необходимо уточнение спецификации распределения остатков. В качестве альтернативы нормальному распределению часто используют t -распределение Стьюдента [3, 4]. Стандартизированное t -распределение Стьюдента с нулевым средним и единичной дисперсией имеет плотность:

$$f(z_t, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)\sqrt{\pi(v-1)}} \left[1 + \frac{z_t^2}{v-2}\right]^{-\frac{v+1}{2}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера;
 $v > 2$ – число степеней свободы.

Куртозис распределения z_t равен

$$K = 3 \frac{v-2}{v-4} \text{ при } v > 4.$$

Куртозис ошибки ε_t равен

$$K_u = 3 \frac{v-2}{v-4} \frac{E(\sigma_t^4)}{[E(\sigma_t^2)]^2}. \quad (4)$$

Множитель, содержащий v в выражении (4), позволяет учитывать избыточный куртозис [1]. Из формулы (4) видно, что куртозис t -распределения зависит от степени свободы и степени волатильности процесса. Таким образом, варьируя степени свободы t -распределения, можно получать разные значения куртозиса и разную степень «тяжелохвостости». Однако, куртозис, основанный на моментах 4-го порядка, очень чувствителен к выбросам, и, следовательно, при наличии выбросов может приводить к ложным выводам о характере распределения остатков.

Вопрос, измеряет ли куртозис «тяжелохвостость», и как на основе куртозиса определить, у какого распределения «тяжелее хвост», является дискуссионным. Если, например, на куртозис смотреть как на среднее выбросов, то большой куртозис свидетельствует о «больших тяжелых хвостах» [15]. Некоторые авторы описывают куртозис как меру и «островершинности», и «толщины хвоста» [16]. В целом существует три подхода к сравнению «тяжелохвостости» распределений: обычный куртозис K , меры «тяжести» хвостов и отношение межквантильных интервалов.

В статье рассмотрим один из подходов – меру «тяжелохвостости», основанную на квантилях, в виде:

$$K_\alpha(y_t) = \frac{Q_{1-\alpha}(y_t) - Q_\alpha(y_t)}{Q_{1-\tau}(y_t) - Q_\tau(y_t)}, \quad (5)$$

где $Q_\theta(y_t)$ – θ -квантиль y_t , $0 < \alpha < \tau < 0,5$ [16].

Следуя статье [17], выберем $\tau = 0,25$ и $\alpha = 0,01$, $\alpha = 0,05$. Считается, что квантильная мера (5) свободна от предположений о распределениях и от значений куртозиса, поэтому устойчива к неверным классификациям распределений и может быть

¹ Отметим, что авторы статьи допускают, что «тяжелохвостость» может быть результатом ошибок выбора спецификации модели, но в данной работе рассматривается только варьирование числа степеней свободы t -распределения для того, чтобы подобрать оптимальную модель с точки зрения минимизации информационных критериев. Подбор других спецификаций и модификаций GARCH-моделей остается за рамками статьи.

использована для сравнения распределений. Рассчитаем и изучим поведение куртозиса (2) и меры «тяжелохвостости» (5) для нормального распределения и t -распределения Стьюдента, как часто используемого распределения в эконометрической практике для учета «толстых хвостов», и сравним с распределениями эмпирических данных доходностей, что позволит сделать предположение о числе степеней свободы t -распределения для эмпирических данных при спецификации GARCH(1,1)-моделей.

2. Анализ тяжелых хвостов распределения в отечественных исследованиях

В данном разделе проанализируем, как учитывают тяжелые хвосты распределений на практике при прогнозировании финансовых рядов доходностей в исследованиях последних лет. Как было отмечено выше, для учета «толстых хвостов» в эконометрической практике часто используют t -распределение Стьюдента и его разновидности. Шведов [18] отмечал важность использования t -распределения для оценок ММП (метод максимального правдоподобия) в случае наличия в данных резко выделяющихся наблюдений. Автор сравнивал EM-алгоритм (англ. expectation-maximization (EM) algorithm) и МНК (метод наименьших квадратов) для оценок линейной регрессионной модели на сгенерированных данных при различных распределениях ошибок. Балаев [19] рассматривал и сравнивал двумерное t -распределение с вектором и скаляром степеней свободы, обобщенное распределение ошибки и распределение Грамма–Шарлье по данным дневных цен закрытия фондовых индексов различных стран: S&P 500, FTSE 100, CAC 40, DAX, Hang Seng, Nikkei за период 26.11.1990–18.11.2012. Автор отмечал, что распределения всех рассматриваемых доходностей имеют «тяжелые хвосты»: коэффициент эксцесса варьировался от 5,21 до 9,45. Было получено, что модель на основе t -распределения с вектором степеней свободы более предпочтительна. Работа Фантаццини [20] имеет обзорный характер и посвящена моделированию многомерных распределений на основе копул-функций. В работе введены понятия «верхней» и «нижней» «хвостовой зависимости» для случайных величин с некоторой вероятностью возникновения выбросов и рассмотрены копула-функции Стьюдента. Балаш [21] в своей работе анализировал

влияние внешних источников информации (новости и объемы торгов) на волатильность ценных бумаг с помощью моделей GARCH(1,1). На основе анализа коэффициентов асимметрии и куртозиса, было отмечено, что гипотеза о нормальности отвергается для большинства рассматриваемых ценных бумаг (доходности акций 19 компаний из списка FTSE100 за период 01.07.2005–01.07.2008). Эксцесс варьировался от 0 до 5,8. В ряде работ для моделирования доходностей авторы использовали класс специальных моделей Go-GARCH, GJR-GARCH, позволяющих оценивать параметр числа степеней свободы t -распределения наряду с другими параметрами модели [22, 23]. В работе Лакшиной [22] моделировались доходности с дальнейшим расчетом динамического коэффициента хеджирования для восьми акций российских компаний, торгующихся на РТС за период 01.01.2007–01.10.2014, эксцесс варьировался от 18 до 42. На основе модели GO-GARCH было рассчитано, что остатки распределены по Стьюденту с 2 степенями свободы.

Заметим, что авторы рассматриваемых работ в качестве «индикатора» «тяжелых хвостов» использовали коэффициент эксцесса, а вопрос о выборе числа степеней свободы t -распределения обычно оставался за рамками таких исследований. Также известно, что включение числа степеней свободы t -распределения в состав аргументов функции правдоподобия в ММП не всегда является корректным [24]. Таким образом, необходимы некоторые альтернативные характеристики «тяжести» хвостов, легко реализуемые на практике. В своей работе мы решили сделать попытку восполнить этот пробел.

3. Анализ меры «тяжелохвостости» и куртозиса для распределения Стьюдента на сгенерированных данных

Рассмотрим поведение меры «тяжелохвостости» в виде (5) и куртозиса (2) для $t(\nu)$ -распределения Стьюдента для разных степеней свободы ν . Методом Монте-Карло сгенерируем 5000 повторений по $N = 200, 750$ и 1000 наблюдений, рассчитаем и сравним куртозис K и меры «тяжелохвостости» $K_{0,1}$, $K_{0,5}$ для квантилей $\alpha = 0,01$, $\alpha = 0,05$ соответственно: интервал варьирования от минимума до максимума $(\min-\max)^2$ и среднее (mean). Результаты моделирования приведены в *таблице 1*. Случайные величины

² Отметим, что в работе также рассматривался 95% доверительный интервал мер, но интерпретация практически не изменилась.

генерировались в пакете Stata16. Генерирование псевдослучайных чисел реализовано на основе алгоритма, предложенного в работе [25]. В силу свойств t -распределения рассматривались степени свободы от 3 до 10, заметим, что теоретический куртозис существует для $\nu > 4$.

Значения мер из *таблицы 1* далее будут использованы для сравнения с мерами «тяжелохвостости» анализируемых доходностей индексов Мосбиржи для дальнейшей спецификации GARCH(1,1)-модели в выборе предположения о распределении остатков.

Таблица 1.

**Меры «тяжелохвостости» (5) и куртозис (2)
для $t(\nu)$ -распределения Стьюдента и нормального распределения**

	$K_{01min-max}$	K_{01mean}	$K_{05min-max}$	K_{05mean}	$K_{min-max}$	K_{mean}
$N = 1000$						
$t(3)$	4,8–7,7	5,96	2,71–3,62	3,08	5,7–464,07	29,883
$t(4)$	3,9–7,08	5,085	2,51–3,37	2,875	4,09–304,55	12,653
$t(5)$	3,76–5,61	4,645	2,41–3,17	2,772	3,88–115,6	7,550
$t(6)$	3,71–5,35	4,388	2,35–3,13	2,708	3,5–127,91	6,166
$t(7)$	3,57–5,02	4,224	2,29–3,11	2,662	3,35–26,54	4,679
$t(8)$	3,45–4,97	4,103	2,26–3,13	2,633	3,30–16,28	4,486
$t(9)$	3,37–4,76	4,016	2,28–3,13	2,609	3,04–13,85	4,186
$t(10)$	3,38–4,68	3,947	2,29–3,11	2,589	3,01–13,83	4,013
$N(0,1)$	3,01–4,07	3,467	2,18–2,74	2,442	2,57–3,84	3,004
$N = 750$						
$t(3)$	4,37–8,94	5,989	2,57–3,75	3,084	4,28–572,55	27,596
$t(4)$	3,81–7,52	5,080	2,39–3,49	2,881	3,34–614,12	12,881
$t(5)$	3,45–6,49	4,649	2,31–3,37	2,771	3,31–541,35	7,391
$t(6)$	3,39–5,82	4,397	2,27–3,25	2,707	3,26–147,19	5,672
$t(7)$	3,34–5,31	4,216	2,27–3,21	2,663	3,06–48,49	4,909
$t(8)$	3,21–5,42	4,105	2,23–3,25	2,631	3,02–55,67	4,411
$t(9)$	3,21–5,21	4,013	2,15–3,07	2,606	2,89–23,87	4,152
$t(10)$	3,12–5,11	3,951	2,18–3,20	2,591	2,89–24,09	3,975
$N(0,1)$	2,82–4,37	3,465	2,13–2,84	2,442	2,49–4,36	2,995
$N = 200$						
$t(3)$	3,87–12,45	6,259	2,25–4,31	3,108	3,28–137,78	13,783
$t(4)$	3,42–9,54	5,237	2,21–3,74	2,897	3,12–141,47	8,775
$t(5)$	3,17–7,75	4,756	2,14–3,73	2,790	2,78–62,72	6,123
$t(6)$	2,81–6,46	4,459	1,97–3,64	2,714	2,71–65,19	5,200
$t(7)$	2,97–7,72	4,307	1,99–3,75	2,670	2,52–21,59	4,648
$t(8)$	2,96–6,31	4,155	2,01–3,40	2,633	2,61–26,43	4,266
$t(9)$	2,96–5,56	4,058	2,05–3,62	2,611	2,51–26,48	4,086
$t(10)$	2,73–6,24	3,987	2,00–3,51	2,588	2,31–30,24	3,943
$N(0,1)$	2,72–4,92	3,504	2,01–3,23	2,446	2,32–4,28	3,007

Поведение мер «тяжелохвостости» — основные выводы:

- ♦ Меры «тяжелохвостости» $K_{0,1}$, $K_{0,5}$ (5), основанные на оценках квантилей, более устойчивы к выбросам по сравнению с куртозисом, рассчитываемым по оценкам моментов распределения. Меры лежат в фиксированных диапазонах в зависимости от степени свободы, в то время как значения куртозиса сильно варьируются при всех рассмотренных степенях свободы ν от 3 до 10. По значениям куртозиса довольно затруднительно делать предположение относительно степеней свободы t -распределения.
- ♦ Более информативны меры «тяжелохвостости» $K_{0,1}$ для квантиля 0,01, так как меры $K_{0,5}$ имеют много пересекающихся интервалов. В дальнейшем для обоснования выбора степеней свободы t -распределения ν будет использоваться мера $K_{0,1}$, а мера $K_{0,5}$ будет использоваться для контроля области значений меры по эмпирическим данным.
- ♦ Полученные интервалы варьирования мер «тяжелохвостости» для теоретических распределений в дальнейшей работе будут использованы для сравнения с мерами «тяжелохвостости» по эмпирическим данным и обоснования предположения относительно степеней свободы t -распределения остатков GARCH(1,1)-модели.
- ♦ Можно предположить, что подход сравнения мер «тяжелохвостости» хорошо работает на больших выборках ($N = 700$ и больше). Отметим, что в статье [17], рассчитывались также меры «тяжелохвостости» на основе дробно-квантильных интервалов (interfractile range) ($\alpha = 0,125$), что

требует выборку как минимум 1000 наблюдений. Это можно отнести к недостаткам данного подхода, так как экономические данные не всегда выражены длинными временными рядами.

4. Меры «тяжелохвостости» и значения куртозисов для индексов Мосбиржи

В работе были рассмотрены доходности (логарифмические разности) индексов Мосбиржи: основных и отраслевых за период с 01.04.2019 по 23.02.2022 гг. (732 торговых дня) [26]. Изучались цены открытия и закрытия (цена первой и последней транзакции в торговый день). На *рис. 1* представлен график доходностей индекса нефти и газа (цена закрытия). Ряд доходностей имеет неизменной нулевое среднее значение, наблюдается кластеризация волатильности, а период $t < 200$ (01.04.2019–20.02.2020) отмечен как период низкой волатильности. Динамика доходностей других индексов ведет себя похожим образом. Периоды высокой волатильности, как правило, характеризуются аномально высокими значениями (по модулю) доходностей, что ведет к высоким значениям куртозиса и появлению «толстых хвостов» распределения. Отметим, что для анализа были взяты индексы, имеющие различные значения куртозисов.

Введем обозначения в *таблицы 2 и 3*:

- ♦ период 1: 01.04.2019–23.02.2022 гг. ($N = 732$), период 2: 01.04.2019–20.02.2020 гг. ($N = 200$);
- ♦ K_1 , K_2 — куртозисы (2) доходностей индексов Мосбиржи за период 1 и 2 соответственно;

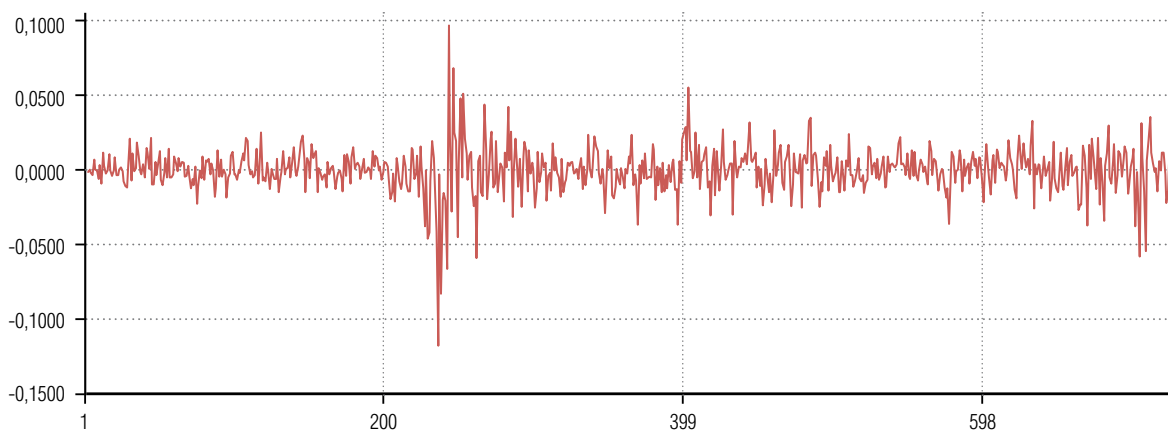


Рис. 1. Логарифмическая разность индекса нефти и газа (цены закрытия) (ось y) за период 04.2019–23.02.2022 (ось x).

♦ K_{101} , K_{105} и K_{201} , K_{205} – меры «тяжелохвостости» (5) для периодов 1 и 2 для квантилей 0,01 и 0,05 соответственно.

Таблицы 2 и 3 содержат значения куртозиса K_1 и K_2 доходностей индексов за два периода: период 1 (01.04.2019–23.02.2022) – весь период наблюдений с ярко выраженной кластеризацией волатильности, период 2 (01.04.2019–20.02.2020) – период низкой волатильности. Отметим, что для периода 1 характерно существенное различие в величине куртозиса между ценой открытия и закрытия почти в два раза, а куртозис варьируется от 6,77 до 51,87. В дальнейшем для моделирования использовалась

и цена открытия (в табл. 2, 3 переменные с индексом 2), и цена закрытия (в табл. 2, 3 переменные с индексом 1) как разные переменные. Очевидно, что величина куртозиса показателей для периода 1 свидетельствует о том, что нельзя использовать предположение о нормальности остатков в GARCH(1,1). В период 2 расхождения в величине куртозиса для цены открытия и закрытия незначительные, и для некоторых индексов совпадают с куртозисом нормального распределения ($K = 3$) (табл. 2, 3). Таким образом, дальнейший анализ и сравнение оценок GARCH(1,1)-моделей в работе проводился для периода 1.

Таблица 2.

Значения куртозисов (2) и мер «тяжелохвостости» (5) доходностей индексов (логарифмических разностей) для основных индексов

Индексы Мосбиржи		Период 1				Период 2		
		$K1$	$K1_{01}$	$K1_{05}$	Предполагаемое $t(\nu)$ для остатков	$K2$	$K2_{01}$	$K2_{05}$
blue1	Индекс МосБиржи голубых фишек	15,194	6,009	2,946	$t(3)-t(5)$	3,597	3,991	2,287
blue2		33,434	6,225	2,966	$t(3)-t(5)$	3,579	4,541	2,509
imoeх1	Индекс МосБиржи	15,596	6,347	3,019	$t(3)-t(5)$	3,406	3,792	2,347
imoeх2		32,844	6,763	2,993	$t(3)-t(4)$	3,392	4,041	2,319
rts1	Индекс РТС	14,432	6,716	3,179	$t(3)-t(4)$	4,982	4,547	2,411
rts2		29,391	6,508	3,087	$t(3)-t(5)$	4,177	5,333	2,789

Замечание: $var1$ – цена закрытия, $var2$ – цена открытия. Период 1: 01.04.2019–23.02.2022 ($N = 732$), период 2: 01.04.2019–20.02.2020 ($N = 200$).

Отметим, что меры «тяжелохвостости» $K2_{01}$ (5) большинства анализируемых индексов (85%), рассчитанные для периода 2 попадают в интервалы варьирования мер для нормального распределения ($N = 200$): 2,72–4,92 (табл. 1). В таблице 2 приведены меры «тяжелохвостости» $K2_{01}$ (5) некоторых переменных, рассчитанные для периода 2. Таким образом, можно предположить, что наилучшей моделью для периода с низкой волатильностью будут GARCH(1,1)-модели в предположении нормальности остатков. В дальнейшем анализе рассматривался только период 1.

Для периода 1 на основании рассчитанных мер были сделаны предположения относительно степеней свободы $t(\nu)$ -распределения остатков для дальнейшей спецификации GARCH(1,1)-моделей

путем сравнения рассчитанных мер «тяжелохвостости» со значением мер теоретических распределений (табл. 1). Например, индекс blue1 имеет меру «тяжелохвостости» $K1_{01} = 6,009$ (табл. 2), эта мера соответствует интервалу варьирования $K01_{\min-\max}$ ($N = 750$) для $t(3)$: 4,37–8,94; $t(4)$: 3,81–7,52; $t(5)$: 3,45–6,49 (табл. 1), следовательно, предполагаемыми распределениями остатков при оценивании GARCH(1,1)-моделей будут $t(3)-t(5)$. Рассмотрим, насколько хорошо рассмотренная мера «тяжелохвостости» позволяет верно специфицировать GARCH(1,1). Из таблиц 2, 3 видно, что меры «тяжелохвостости» не дают однозначного ответа, но позволяют сузить количество моделей, которые необходимо в дальнейшем оценивать.

Таблица 3.

**Значения куртозисов (2) и мер «тяжелохвостости» (5)
доходностей индексов (логарифмических разностей)
для отраслевых индексов**

Индексы Мосбиржи		Период 1				Период 2
		$K1$	$K1_{01}$	$K1_{05}$	Предполагаемое $t(\nu)$ для остатков	$K2$
gaz1	Нефти и газа	14,669	5,602	3,007	$t(3)-t(6)$	3,233
gaz2		27,428	6,221	3,388	$t(3)-t(5)$	3,529
chem1	Химии и нефтехимии, в рублях	6,772	5,785	3,528	$t(3)-t(6)$	5,527
chem2		10,558	6,034	3,270	$t(3)-t(5)$	7,789
electro1	Электроэнергетики, в рублях	21,194	6,604	3,107	$t(3)-t(4)$	3,519
electro2		36,633	6,775	2,937	$t(3)-t(4)$	4,044
telecom1	Телекоммуникаций, в рублях	13,667	6,373	3,109	$t(3)-t(5)$	7,295
telecom2		51,869	7,142	3,461	$t(3)-t(4)$	5,977
metal1	Металлов и добычи, в рублях	12,399	5,621	2,842	$t(3)-t(6)$	3,295
metal2		25,064	5,975	3,049	$t(3)-t(5)$	3,472
finan1	Финансов, в рублях	13,063	5,973	3,309	$t(3)-t(5)$	4,097
finan2		37,475	6,557	3,327	$t(3)-t(5)$	4,421
potreb1	Потребительского сектора, в рублях	12,399	5,621	2,842	$t(3)-t(6)$	3,295
potreb2		25,064	5,975	3,049	$t(3)-t(5)$	3,472
trans1	Транспорта, в рублях	16,832	7,081	3,457	$t(3)-t(4)$	5,569
trans2		18,288	7,712	3,368	$t(3)$	7,355

Замечание: $var1$ – цена закрытия, $var2$ – цена открытия. Период 1: 01.04.2019–23.02.2022 ($N = 732$), период 2: 01.04.2019–20.02.2020 ($N = 200$).

5. Результаты

В данном разделе сравним спецификации GARCH(1,1) для индексов Мосбиржи в предположении разных видов распределения в остатках: нормального и t -распределения со степенями свободы от 3 до 9. В качестве примера приведены результаты оценивания и сравнения моделей для показателя gaz1 в таблице 3. Для сравнения моделей использовался критерий отношения правдоподобия [27, с. 171] и сравнение информационных критериев Акаике и Шварца. Результаты дали один и тот же результат, поэтому далее в тексте приведены только значение максимума функции правдоподобия. В таблице 4 приведены оценки параметров γ и β GARCH(1,1)-модели в виде (3), значения LLF – значение максимума функции правдоподобия для

текущей модели. Отметим, что в Stata рассчитывается полная функция логарифма правдоподобия с включением слагаемых без оптимизационных параметров. Вид функции логарифма правдоподобия в предположении нормального и t -распределения приведен в [28]. Все коэффициенты модели статистически значимы на 1% уровне значимости.

Результаты показывают (табл. 4), что для различных спецификаций коэффициент $\beta \approx 0,84-0,89$, что свидетельствует об инерционности волатильности во времени, $(\gamma + \beta)$ превосходит 0,9, что указывает на наличие ярко выраженного GARCH-эффекта. Коэффициенты γ и β для различных спецификаций ведут себя достаточно устойчиво. Для случая $t(3)$ $(\gamma + \beta) > 1$, что нарушает условие положительности условной дисперсии модели. Также эта модель неадекватна с точки зрения моделирования «тя-

Таблица 4.
**Оценки параметров GARCH(1,1)-модели
для переменной gaz1
в предположении различных
степеней свободы t -распределения остатков**

Распределение остатков	γ	β	$\gamma + \beta$	LLF
N	0,155	0,836	0,991	2130,876
$t(3)$	0,136	0,892	1,028	2149,819
$t(4)$	0,110	0,884	0,993	2153,393
$t(5)$	0,104	0,879	0,982	2154,087
$t(6)$	0,102	0,875	0,978	2153,702
$t(7)$	0,103	0,871	0,974	2151,963
$t(8)$	0,103	0,871	0,974	2151,963
$t(9)$	0,104	0,869	0,973	2150,997

желых хвостов», так как куртозис t -распределения определен и больше 3 для степеней свободы $\nu > 4$. С точки зрения минимальных значений информационных критериев наилучшей моделью является модель с $t(5)$ -распределением в остатках, для которой $AIC = -4300,17$ и $BIC = -4281,79$, для данной модели также наблюдается максимум $LLF = 2154,09$. Наиболее предпочтительной моделью для прогнозирования волатильности будет GARCH(1,1) с предположением $t(5)$ -распределения в остатках. Отметим, что получившаяся модель соответствует предположениям относительно модели по мерам «тяжелохвостости»: $t(3)$ – $t(6)$ (табл. 3).

Отметим, что показатель gaz1 имеет куртозис $K1 = 14,67$, что свидетельствует о выбросах в данных и не позволяет использовать предположение о нормальности остатков в GARCH(1,1)-модели. GARCH(1,1) с нормальностью в остатках имеет самые большие значения AIC , BIC и минимальные LLF . Меры «тяжелохвостости» $K1_{01} = 5,60$ и $K1_{05} = 3,01$ попадают в интервалы варьирования для мер «тяжелохвостости» распределений $t(3)$ – $t(6)$ (табл. 1), что в данном случае совпало с результатами оценивания GARCH(1,1)-модели методом перебора.

Аналогичным образом оценивались GARCH(1,1)-модели для всех других показателей. В таблице 5

приведены наилучшие модели с максимумом LLF . Сравнение различных спецификаций GARCH(1,1)-моделей для каждого показателя приведены в приложении.

Как показал анализ оценок параметров GARCH(1,1)-модели для индексов Мосбиржи, наиболее распространенными и наилучшими моделями являются модели с предположением $t(5)$ -распределения в остатках. Такие спецификации модели составили 60%, при этом куртозис логарифмических доходностей показателей варьировался от 6 до 51 (табл. 2, 3). В Stata16 есть возможность оценивать GARCH(1,1)-модели в предположении $t(\nu)$ -распределения в остатках при $\nu \rightarrow \infty$ (например, можно выбрать $\nu = 1000$), но, как показывает проведенный анализ эмпирических данных, степени свободы ν t -распределений для рассмотренных показателей варьируются от 4 до 7 (табл. 5), а по мерам «тяжелохвостости» при $\nu = 10$ t -распределение приближается к нормальному. Предположения относительно степеней свободы на основе меры «тяжелохвостости» совпали с результатами эмпирического анализа методом перебора моделей в 68% случаев: исключением стали несколько индексов, например, trans2. Модели с предположением $t(3)$ -распределения в остатках, для которого не существует теоретического куртозиса, не оказались в числе наилучших. Также можно заметить, что нет ни одной модели с предположением нормальности остатков для периода 1, такие модели имели, как правило, наихудшие характеристики LLF (приложение).

Отметим, что в работе не рассматривались альтернативные подходы к оцениванию «тяжелохвостости» распределения, например, другие типы мер, что также представляет научный интерес для дальнейшего исследования. Еще одним возможным распределением при спецификации GARCH-моделей является GED-распределение, которое в данном исследовании не рассматривалось. Часто распределение финансовых показателей имеют асимметрию, что также необходимо учитывать при выборе спецификации GARCH-моделей, но нами рассмотрено не было. Как уже было отмечено выше, в работах также используют меры «тяжелохвостости» на основе дробно-квантильных интервалов (interfractile range), что требует выборку объема $N \geq 1000$ [17]. Эти меры также могут стать предметом дальнейшего исследования.

Таблица 5.

**Оценки параметров GARCH(1,1)-модели для индексов Мосбиржи
в предположении различных степеней свободы
 t -распределения остатков**

Индексы	Предполагаемое распределение остатков по мере «тяжелохвостости» (5)	Распределение остатков наилучшей модели по LLF	γ	β	$\gamma + \beta$	LLF
Основные индексы акций						
blue1	$t(3)-t(5)$	$t(6)$	0,115	0,869	0,984	2233,683
blue2	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,123	0,861	0,984	2219,847
imoex1	$t(3)-t(5)$	$t(6)$	0,116	0,871	0,987	2295,943
imoex2	$t(3)-t(4)$	$t(7)$	0,112	0,863	0,975	2294,071
rts1	$t(3)-t(4)$	$t(5)$	0,097	0,901	0,998	2052,176
rts2	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,121	0,871	0,992	2046,424
Отраслевые индексы						
gaz1	$t(3)-t(6)$	$t(5)$	0,104	0,879	0,982	2154,087
gaz2	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,145	0,84	0,985	2109,548
chem1	$t(3)-t(6)$	$t(5)$	0,05	0,955	1,005	2345,464
chem2	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,149	0,829	0,978	2313,152
electro1	$t(3)-t(4)$	$t(5)$	0,136	0,842	0,978	2350,902
electro2	$t(3)-t(4)$	$t(5)$	0,137	0,843	0,98	2350,902
telecom1	$t(3)-t(5)$	$t(4)$	0,119	0,864	0,983	2437,535
telecom2	$t(3)-t(4)$	$t(4)$	0,152	0,857	1,009	2418,431
metal1	$t(3)-t(6)$	$t(5)$	0,096	0,879	0,975	2275,479
metal2	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,142	0,806	0,948	2262,375
finan1	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,102	0,898	1,000	2167,337
finan2	$t(3)-t(5)$	$t(4)$	0,124	0,883	1,007	2129,232
potreb1	$t(3)-t(6)$	$t(4)$	0,104	0,881	0,985	2274,596
potreb2	$t(3)-t(5)$	$t(5)$	0,142	0,806	0,948	2262,375
trans1	$t(3)-t(4)$	$t(4)$	0,212	0,732	0,944	2251,718
trans2	$t(3)$	$t(6)$	0,301	0,668	0,969	2217,500

Заключение

В статье были рассмотрены обобщенные авторегрессионные модели условной гетероскедастичности для 22 индексов Мосбиржи (основных и отраслевых), имеющих различные значения куртозиса от 3 до 52, с целью изучения «тяжелохвостости» распределений и влияния куртозиса на выбор предположения о виде распределения в остатках модели для объяснения «толстых хвостов». Как по-

казал анализ, куртозис лишь отчасти является «индикатором» «толстых хвостов»: на его основании сложно делать предположение о виде распределения остатков, так как он чувствителен к выбросам. Так, например, куртозисы для chem1 и blue2 составили 6,77 и 33,43, но для этих показателей наилучшей моделью оказалась одна и та же спецификация модели – GARCH(1,1) с $t(5)$ -распределением в остатках. В работе было показано, что рассмотрен-

ные меры «тяжелохвостости» достаточно устойчивы к выбросам, позволяют частично обосновать выбор степени свободы для t -распределения при оценивании GARCH(1,1)-моделей. Следует заметить, что использование подхода сравнения моделей на основе оценок метода максимального правдоподобия дает похожие результаты в 68% случаев (табл. 5) и возможно в эконометрической практике для анализа финансовых временных рядов на выборках объема $N < 1000$ именно классический подход предпочтителен. Однако проведенный анализ мер «тяжелохвостости» имеет важное

практическое значение для моделирования временных рядов с «тяжелыми хвостами» и обоснования выбора степеней свободы t -распределения, так как куртозис не является хорошим количественным измерителем «тяжести» хвостов распределения. На взгляд авторов, меры «тяжелохвостости» и их свойства могут быть полезны широкому кругу исследователей, работающих с финансовыми временными рядами, для получения более точных прогнозов доходностей, а данная статья является небольшим вкладом в дальнейшее развитие инструментария анализа временных рядов. ■

Приложение.

Сравнение GARCH(1,1)-моделей для индексов Мосбиржи по LLF

Распределение остатков	Индексы										
	blue1	blue2	imoex1	imoex2	rts1	rts2	gaz2	chem1	chem2	electro1	electro2
N	2217,00	2189,29	2279,85	2277,39	2021,94	2017,52	2067,12	2321,80	2285,55	2321,49	2266,05
$t(3)$	2225,95	2213,30	2288,15	2284,26	2048,65	2041,62	2104,99	2342,08	2309,40	2347,75	2322,18
$t(4)$	2231,36	2218,40	2293,59	2290,61	2051,96	2045,63	2108,85	2345,10	2312,76	2350,74	2325,95
$t(5)$	2233,23	2219,85	2295,48	2293,09	2052,18	2046,42	2109,55	2345,46	2313,15	2350,90	2326,57
$t(6)$	2233,68	2219,83	2295,94	2293,95	2051,30	2046,02	2109,00	2344,89	2312,49	2350,07	2325,93
$t(7)$	2233,51	2219,18	2295,78	2294,07	2050,04	2045,15	2107,95	2343,97	2311,44	2348,89	2324,75
$t(8)$	2233,06	2218,27	2295,33	2293,83	2048,67	2044,10	2106,71	2342,94	2310,28	2347,63	2323,37
$t(9)$	2232,49	2217,26	2294,77	2293,41	2047,32	2043,02	2105,41	2341,91	2309,12	2346,38	2321,91

Распределение остатков	Индексы									
	telecom1	telecom2	metal1	metal2	finan1	finan2	potreb1	potreb2	trans1	trans2
N	2383,40	2355,57	2244,45	2216,95	2142,97	2077,17	2244,45	2259,31	2198,72	2192,53
$t(3)$	2435,90	2416,07	2270,33	2259,31	2166,45	2126,57	2270,33	2259,31	2250,95	2210,66
$t(4)$	2437,54	2418,43	2274,60	2262,29	2166,45	2129,23	2274,60	2262,29	2251,72	2215,79
$t(5)$	2436,19	2417,67	2275,48	2262,38	2167,34	2129,05	2275,48	2262,38	2249,93	2217,34
$t(6)$	2433,95	2415,87	2275,07	2261,43	2167,05	2127,84	2275,07	2261,43	2247,41	2217,50
$t(7)$	2431,52	2413,74	2274,14	2260,10	2166,30	2126,24	2274,14	2260,10	2244,78	2217,06
$t(8)$	2429,13	2411,56	2273,01	2258,66	2165,37	2124,53	2273,01	2258,66	2242,26	2216,37
$t(9)$	2426,88	2409,43	2271,83	2257,22	2164,41	2122,84	2271,83	2257,22	2239,91	2215,57

Замечание. Для gaz1 сравнение моделей приведено в табл. 4.

Литература

1. Росси Э. Одномерные GARCH-модели: обзор // Квантиль. 2010. № 8. С. 1–67.
2. Engle R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. P. 987–1007. <https://doi.org/10.2307/1912773>
3. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1986. Vol. 31. P. 307–327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
4. Bollerslev T., Baillie R. The message in daily exchange rates: A conditional-variance tale // *Journal of Business & Economic Statistics*. 1989. Vol. 7(3). P. 297–305. <https://doi.org/10.2307/1391527>
5. Hsieh D.A. Modeling heteroscedasticity in daily foreign-exchange rates // *Journal of Business & Economic Statistics*. 1989. Vol. 7(3). P. 307–317. <https://doi.org/10.2307/1391528>
6. Nelson D. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach // *Econometrica*. 1991. Vol. 59(2). P. 347–370. <https://doi.org/10.2307/2938260>
7. Hansen B. Autoregressive conditional density estimation // *International Economic Review*. 1994. Vol. 35(3). P. 705–730. <https://doi.org/10.2307/2527081>
8. Ibragimov M., Ibragimov R., Walden J. Heavy-tailed distributions and robustness in economics and finance. Springer International Publishing, 2015.
9. Asmussen S.R. Steady-state properties of GI/G/1 // *Applied Probability and Queues. Stochastic Modelling and Applied Probability*. 2003. Vol. 51. P. 266–301. https://doi.org/10.1007/0-387-21525-5_10
10. Foss S., Korshunov D., Zachary S. An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. Springer Science & Business Media, 2013.
11. Novak S.Y. Extreme value methods with applications to finance. London: CRC, 2011.
12. Fiori A.M., Zenga M. Karl Pearson and the origin of kurtosis // *International Statistical Review*. 2009. Vol. 77(1). P. 40–50.
13. Цыплаков А. Мини-словарь англоязычных эконометрических терминов // Квантиль. 2008. № 5. С. 45–48.
14. Engle R. GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics // *Journal of economic perspectives*. 2001. Vol. 15(4). P. 157–168. <https://doi.org/10.1257/jep.15.4.157>
15. Hogg R.V. Adaptive robust procedures: A partial review and some suggestions for future applications and theory // *Journal of the American Statistical Association*. 1974. Vol. 69. P. 909–927.
16. Ruppert D. What is kurtosis?: An influence function approach // *The American Statistician*. 1987. Vol. 41(1). P. 1–5. <https://doi.org/10.2307/2684309>
17. Xiaochun L. On tail fatness of macroeconomic dynamics // *Journal of Macroeconomics*. 2019. Vol. 62(C). <https://doi.org/10.1016/j.jmacro.2019.103154>
18. Шведов А.С. Робастная регрессия с применением t-распределения и EM-алгоритма // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. 2011. Т. 15. № 1. С. 68–87.
19. Балаев А.И. Анализ многомерных временных рядов финансовых доходностей: сравнение различных подходов к моделированию тяжелых хвостов // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. 2013. Т. 17. № 2. С. 239–263.
20. Фантащини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. II. // *Прикладная эконометрика*. 2011. №23(3). С. 98–132.
21. Балаш В.А., Сидоров С.П. Использование данных новостной аналитики в GARCH моделях // *Прикладная эконометрика*. 2013. № 1. С. 82–96.
22. Лакшина В.В. Динамическое хеджирование с учетом степени неприятия риска // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. 2016. Т. 20. № 1. С. 156–174.
23. Асатуров К.Г., Теплова Т.В. Построение коэффициентов хеджирования для высоколиквидных акций российского рынка на основе моделей класса GARCH // *Экономика и математические методы*. 2014. Т. 50. № 1. С. 37–54.
24. Lucas A. Robustness of the student-t based m-estimator // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1997. Vol. 26(5). P. 1165–1182. <https://doi.org/10.1080/03610929708831974>
25. Matsumoto M., Nishimura T. Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 1998. Vol. 8. P. 3–30.
26. Индексы Мосбиржи. [Электронный ресурс] <https://www.moex.com/ru/indices> (дата обращения 10.12.22).
27. Айвазян С.А. Методы эконометрики. М.: Магистр, 2010.
28. Документация Stata. [Электронный ресурс] <https://www.stata.com/manuals/tsarch.pdf> (дата обращения 10.12.22).

Об авторах

Родионова Лилия Анатольевна

кандидат экономических наук;

доцент, департамент статистики и анализа данных, факультет экономических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 109028, г. Москва, Покровский бульвар, д. 11;

E-mail: lrodionova@hse.ru

ORCID: 0000-0002-0310-6359

Копнова Елена Дмитриевна

кандидат технических наук;

доцент, департамент статистики и анализа данных, факультет экономических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 109028, г. Москва, Покровский бульвар, д. 11;

E-mail: ekopnova@hse.ru

ORCID: 0000-0002-8429-141X

Application of measures of heavy-tailedness in problems for analysis of financial time series

Lilia A. Rodionova

E-mail: lrodionova@hse.ru

Elena D. Kopnova

E-mail: ekopnova@hse.ru

HSE University

Address: 11, Pokrovsky Bulvar, Moscow 109028, Russia

Abstract

An important feature when working with financial data is the fact that the residuals of GARCH-models often have fatter tails than the tails of a normal distribution due to the large number of “outliers” in the data. This requires more detailed study. Kurtosis and quantile-based measure of heavy-tailedness were analyzed and compared in the article in relation to the problem of choosing the GARCH(1,1)-model specification. The data of indices of the Moscow Exchange were considered for the period from April 01, 2019 to February 22, 2022. Kurtosis values ranged from 3 to 52. Empirical data showed that kurtosis was very sensitive to “outliers” in the data, which made it difficult to make assumptions about the distribution of model residuals. The approach considered in this paper based on the heavy-tailedness measure made

it possible to justify the choice of degrees of freedom of the t-distribution for the model residuals to explain the fat tails in financial data. It was found that GARCH(1,1)-models with t(5)-distribution in the residuals are common.

Keywords: GARCH, kurtosis, quantile-based measure of heavy-tailedness, t-distribution of residuals, degrees of freedom, fat tails

Citation: Rodionova L.A., Kopnova E.D. (2023) Application of measures of heavy-tailedness in problems for analysis of financial time series. *Business Informatics*, vol. 17, no. 3, pp. 38–52. DOI: 10.17323/2587-814X.2023.3.38.52

References

1. Rossi E. (2010) One-dimensional GARCH models: A review. *Quantile*, vol. 8, pp. 1–67 (in Russian).
2. Engle R. (1982) Autoregressive conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometrica*, vol. 50, pp. 987–1007. <https://doi.org/10.2307/1912773>
3. Bollerslev T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, vol. 31, pp. 307–327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
4. Bollerslev T., Baillie R. (1989) The message in daily exchange rates: A conditional-variance tale. *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 7(3), pp. 297–305. <https://doi.org/10.2307/1391527>
5. Hsieh D.A. (1989) Modeling heteroscedasticity in daily foreign-exchange rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 7(3), pp. 307–317. <https://doi.org/10.2307/1391528>
6. Nelson D. (1991) Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, vol. 59, no. 2, pp. 347–370. <https://doi.org/10.2307/2938260>
7. Hansen B. (1994) Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, vol. 35, no. 3, pp. 705–730. <https://doi.org/10.2307/2527081>
8. Ibragimov M., Ibragimov R., Walden J. (2015) *Heavy-tailed distributions and robustness in economics and finance*. Springer International Publishing.
9. Asmussen S.R. (2003) Steady-state properties of GI/G/1. *Applied Probability and Queues. Stochastic Modelling and Applied Probability*, vol. 51, pp. 266–301. https://doi.org/10.1007/0-387-21525-5_10
10. Foss S., Korshunov D., Zachary S. (2013) *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*. Springer Science & Business Media.
11. Novak S.Y. (2011) *Extreme value methods with applications to finance*. London: CRC.
12. Fiori A.M., Zenga M. (2009) Karl Pearson and the origin of kurtosis. *International Statistical Review*, vol. 77(1), pp. 40–50.
13. Tsyplakov A. (2008) Mini-dictionary of English econometric terms. *Quantile*, vol. 5, pp. 45–48 (in Russian).
14. Engle R. (2001) GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. *Journal of economic perspectives*, vol. 15, no 4, pp. 157–168. <https://doi.org/10.1257/jep.15.4.157>
15. Hogg R.V. (1974) Adaptive robust procedures: A partial review and some suggestions for future applications and theory. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, pp. 909–927.
16. Ruppert D. (1987) What is kurtosis?: An influence function approach. *The American Statistician*, vol. 41(1), pp. 1–5. <https://doi.org/10.2307/2684309>
17. Xiaochun L. (2019) On tail fatness of macroeconomic dynamics. *Journal of Macroeconomics (electronic journal)*, vol. 62(C). <https://doi.org/10.1016/j.jmacro.2019.103154>
18. Shvedov A.S. (2011) Robust regression using t-distribution and EM-algorithm. *The HSE Economic Journal*, vol. 1, pp. 68–87 (in Russian).
19. Balaev A.I. (2013) Multivariate time series analysis of financial returns: Comparison of different heavy tail modeling approaches. *The HSE Economic Journal*, vol. 2, pp. 239–263 (in Russian).
20. Fantazzini D. (2011) Modeling multivariate distributions using copula functions. II. *Applied Econometrics*, vol. 3, pp. 98–132 (in Russian).

21. Balash V.A., Sidorov S.P. (2013) Using news analytics data in GARCH models. *Applied Econometrics*, vol. 1, pp. 82–96 (in Russian).
22. Lakshina V.V. (2016) Dynamic hedging with risk aversion. *The HSE Economic Journal*, vol. 1, pp. 156–174 (in Russian).
23. Asaturov K.G., Teplova T.V. (2014) Construction of hedging ratios for highly liquid shares of the Russian market based on GARCH class models. *Economics and mathematical methods*, vol. 1, pp. 37–54 (in Russian).
24. Lucas A. (1997) Robustness of the Student-t based M-estimator. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, vol. 26, no. 5, pp. 1165–1182. <https://doi.org/10.1080/03610929708831974>
25. Matsumoto M., Nishimura T. (1998) Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, vol. 8, pp. 3–30.
26. *Moscow Exchange Indices*. Available at: <https://www.moex.com/ru/indices> (accessed 10 December 2022).
27. Ayvazyan S.A. (2010) *Methods of econometrics*. Moscow: Magistr (in Russian).
28. *State documentation*. Available at: <https://www.stata.com/manuals/tsarch.pdf> (accessed 10 December 2022).

About the authors

Lilia A. Rodionova

Cand. Sci. (Econ.);

Associate Professor, Department of Statistics and Data Analysis, HSE University, 11, Pokrovsky Bulvar, Moscow 109028, Russia;

E-mail: lrodionova@hse.ru

ORCID: 0000-0002-0310-6359

Elena D. Kopnova

Cand. Sci. (Tech.);

Associate Professor, Department of Statistics and Data Analysis, HSE University, 11, Pokrovsky Bulvar, Moscow 109028, Russia;

E-mail: ekopnova@hse.ru

ORCID: 0000-0002-8429-141X